青年数学叢書

複数和保角映象

馬庫希維奇著
高　徹　譯



中國青年出版社
1957年·北京

序

这本小册子把复数和它的一些最簡單的函数(包括儒科夫斯基函数和它在飞机翼型構造上的应用)介紹給讀者。敍述采取几何形式。把复数看作有向綫段，把函数看作映象。为要引导讀者这样来理解复数，我們就从实数和它的运算的几何解釋开始講起。这本小册子是根据作者为九年級和十年級同学作演講的稿子写成的。并不要求讀者先熟悉复数。

作 者

А. И. МАРКУШЕВИЧ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ
ГОСТЕХИЗДАТ
МОСКВА, 1954

1. 在作实数的几何表示时，我們采用了数軸，也就是采用一条直綫，在这条直綫上給定一点 A（就是坐标的原点），表示数目 0，又給定另一点 B，表示数目 +1（图 1）。

图 1.

我們把从 A 到 B 的方向看作数軸的正方向，把綫段 AB 看作長度的單位。用任何綫段 AC 来表示某一个实数 x，它的絕对值等于这个綫段的長。如果 C 和 A 不相重合（也就是說，如果数 x 不等于 0），那末当从 A 到 C 的方向和軸的正方向一致时，x 是正的，当这方向和軸的正方向相反时，x 是負的。

2. 我們把数軸上的任何綫段都看作有向綫段——直綫上的向量。我們在每个向量上都分别出始点和終点，就用从始点到終点的方向作为向量的方向。写出向量要用兩个字母：在前面位置的是始点，在后面位置的是終点。每一个向量，不管它的始点是在什么地方（不一定要在 A 点），都表示某一个实数，它的絕对值等于向量的長度。当向量的方向和軸的正方向一致时，这个数是正数，当它的方向和軸的正方向相反时，这个数是負数。例如，向量 AB（始点是 A，終点是 B）表示数目 + 1，而向量 BA（始点是 B，終点是 A）就表示数目

-1.

3. 向量的方向也可以用它和軸的正方向之間的交角来决定。要是向量的方向和軸的正方向一致，我們就認为这个角等于0°。要是它和軸的正方向相反，我們就認为这个角等于180°(或$-180°$)。設x是一个任意实数；如果$x\neq 0$，那末表示这个数的向量和軸的正方向之間的交角叫做数x的幅角。很明显，正数的幅角等于0°，負数的幅角等于180°(或$-180°$)。数x的幅角記作：Arg x(Arg是拉丁字argumentum的前三个字母，argumentum在这里可譯作記号或符号)。数0不是用向量来表示，而是用点来表示的。虽然以后我們会把点看作向量的特殊情形——長度是零的向量，但是在这种情形，我們既不能談論它的方向，也不能談論它和数軸的交角；因此，数0就不会有任何幅角。

4. 我們現在来討論实数运算的几何解釋。在这里，应当談談加法和乘法的解釋，从这里就很容易轉到逆运算——減法和除法的解釋。設c_1和c_2是兩个实数，AB_1和AB_2是表示它們的向量。我們現在来寻找一条規則，根据这条規則，在知道向量AB_1和AB_2以后，就可以作出表示和数c_1+c_2或乘积c_1c_2的向量。要想得到表示和数的向量AC，应該把表示第一項的向量AB_1怎样办呢？

容易証明，在任何情形，要想得到表示和数的向量，只須在向量AB_1的終点放上一个就長和方向来說都和向量AB_2一致的向量B_1C就可以了；向量AC也就是我們所求的向量(图2)。

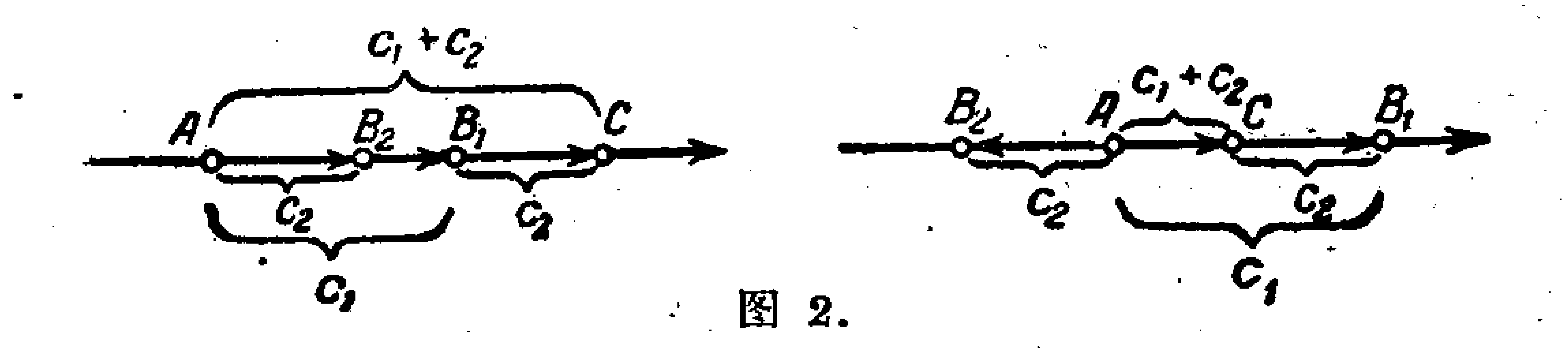


图 2.

5. 現在来討論乘法. 如果其中有一个因子等于 0，那末积就等于 0；在这种情形，表示乘积的向量縮成只有一个点. 現在假定沒有一个因子等于 0. 这时候乘积 c_1c_2 的絕对值[①]就等于 $|c_1|\cdot|c_2|$，也就是 c_1 和 c_2 的絕对值的积. 因此，表示乘积的向量 AD 的長，就等于表示因子的向量 AB_1 和 AB_2 的長的乘积. 乘积 c_1c_2 的符号，当 $c_2>0$ 时，和 c_1 的符号一致；当 $c_2<0$ 时，和 c_1 的符号相反. 換句話說，AD 的方向，当 $\operatorname{Arg} c_2=0°$（也就是 $c_2>0$）时，和 AB_1 的方向一致；当 $\operatorname{Arg} c_2=180°$（也就是 $c_2<0$）时，和 AB_1 的方向相反. 現在，我們就不难回答这样的問題：要想从表示因子 c_1 的向量 AB_1 得出表示乘积 c_1c_2 $(c_1\neq0, c_2\neq0)$ 的向量 AD，应当怎样办呢？要想得出向量 AD，就应当用 $|c_2|$ 去乘 AB_1 的長（不改变向量 AB_1 的方向），然后把已經改变了的向量轉一个角，这个角等于 c_2 的幅角（就是說，如果 $c_2>0$，轉 0°；如果 $c_2<0$，就轉 180°）；得

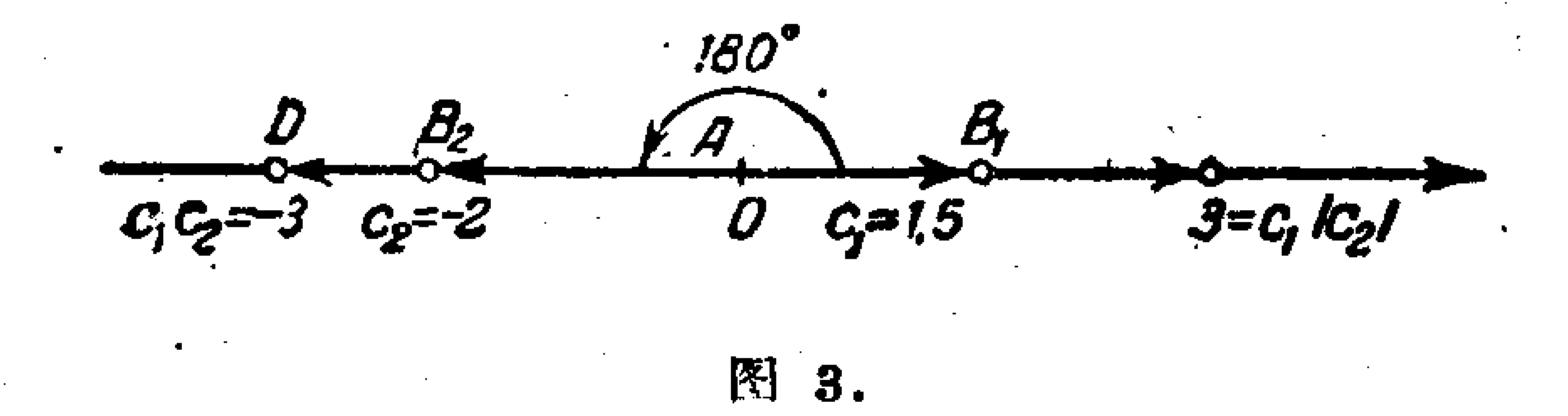


图 3.

① 一数 c 的絕对值記作 $|c|$. 例如，$|5|=5$，$|-3|=3$，$|0|=0$.

到的向量就表示乘积。在图 3 上，用例子 ($c_1=1.5$, $c_2=-2$) 来說明了这条規則。

6. 我們已經把直綫上的每一个向量同这个向量表示的数联系起来了。現在我們来討論平面上的各种向量，并且把它們也一个一个同它們表示的数联系起来。用这种方法得到的数——复数，是一种比实数更帶有普遍性質的数。实数只是复数的一种特殊情形，正如同整数是有理数的一种特殊情形、有理数是实数的一种特殊情形一样。

我們从这样开始：在我們要討論的向量所在的平面上，引兩条互相垂直的直綫——兩条具有公共原点 A 的数軸 Ax 和 Ay，又設綫段 AB 是表示單位長度(图 4)。这样，在軸 Ax 上或和軸 Ax 平行的任何一个向量，仍旧可以看成是实数的几何形象(几何表示)。例如向量 AB 和 $A'B'$，它們的長都等于一个單位，并且方向和 Ax 的正方向相同，它們都表示数目 1；向量 CD，長等于 2，方向和 Ax 的正方向相反，它就表示数目 -2。不在 Ax 上，又不跟这个軸平行的向量，例如 AE 和 FG，不表示任何实数。这种向量我們說它們表示的是虛数。長短相等、互相平行而且方向一致的向量，表示同一个虛数；而長短不等、方向不同的向量，就表示不同的虛数。在这里，我們多少是搶先了一点，因为，还不知道虛数是什么，就已經在談

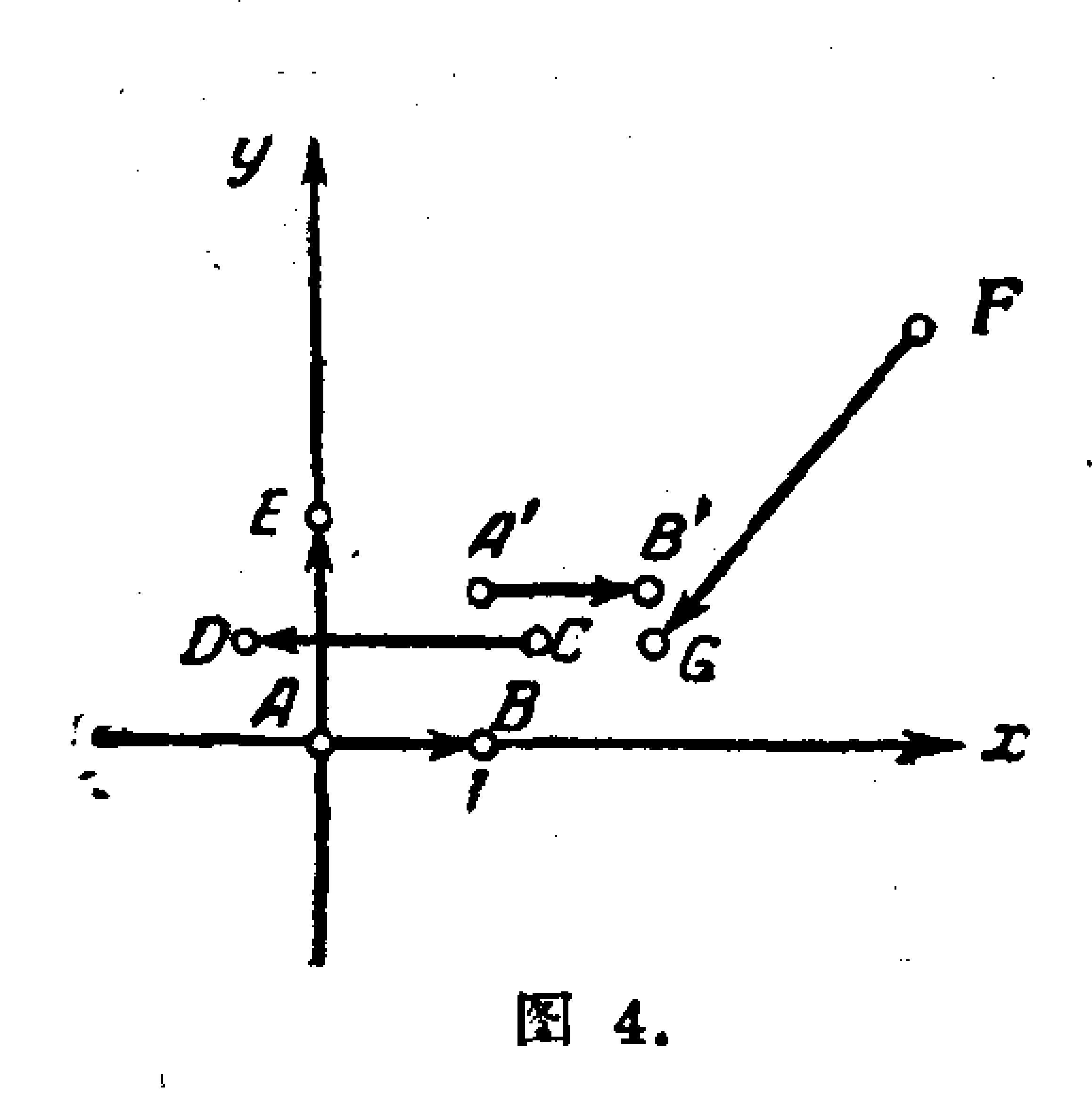


图 4.

論它們的形象了；然而在生活里，往往也是先認識形象，然后再認識本質的。

上面我們已經指出，实数的运算可以用表示这些实数的向量的运算来代替。同样情形，虛数的运算，我們也可以用表示它們的向量的运算来代替。我們不重新发明运算規則，却把已經找到的实数加法和乘法的几何运算規則保留了下来。不同的只是，在实数是用直綫 Ax 上的向量（或者平行于这条直綫的向量）来表示，而虛数却用平面上不在 Ax 上、也不和 Ax 平行的向量来表示。

7. 在往下討論以前，我們要着重指出，实数（我們已經熟識了）和虛数（我們才只就"图象"知道它）都叫做复数（"复"字是复合的意思）。

对照起来，我們想到，有理数和无理数在合起来討論的时候，也要求一个公共的名称：实数。

現在来討論复数的加法。我們假定实数加法的規則仍旧有效。設 AB_1 和 AB_2 是兩个向量，分別表示兩个复数 c_1 和 c_2；要作出表示它們的和 c_1+c_2 的向量，我們从向量 AB_1 的終点引向量 B_1C，長短和方向都跟向量 AB_2 一致；連接 AB_1 的始点跟 B_1C 的終点的向量 AC，也就是所求的向

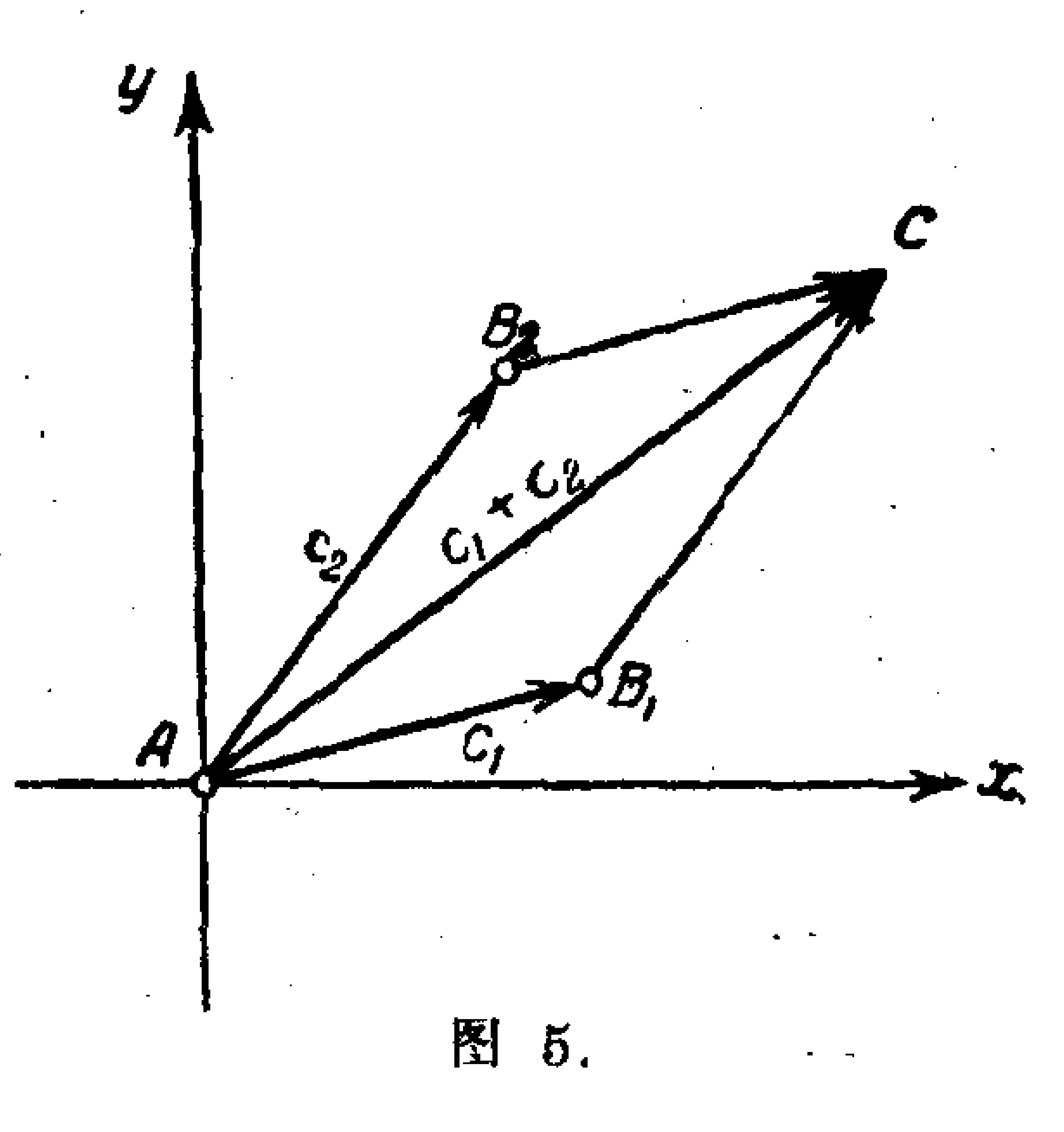


图 5.

量(图5)。

在这里新的一点是：我們把这条規則运用到了复数(在平面上表示出来的任何向量)的加法，而以前却只是运用在实数(在直綫上表示出的向量)上。

如果运用这条規則来作和数 c_2+c_1 (加項交換了位置)的图形，那末就要从表示 c_2 的向量 AB_2 的終点引一个向量，它的長短和方向都跟表示 c_1 的向量 AB_1 一致。显而易見，我們得出了同一点 C (在图 5 上我們得到了一个平行四边形)，因此，和数 c_2+c_1 跟和数 c_1+c_2 是由同一个向量 AC 来表示的。換句話說，从加法規則可以推出交換律的成立：

$$c_2+c_1=c_1+c_2.$$

很容易証明，結合律也成立：

$$(c_1+c_2)+c_3=c_1+(c_2+c_3).$$

所有必要的作图都画在图 6 上。显而易見，把 c_3 (CD) 加上 c_1+c_2 (AC)，正跟把 c_2+c_3 (B_1D) 加上 $c_1(AB_1)$ 一样，我們得

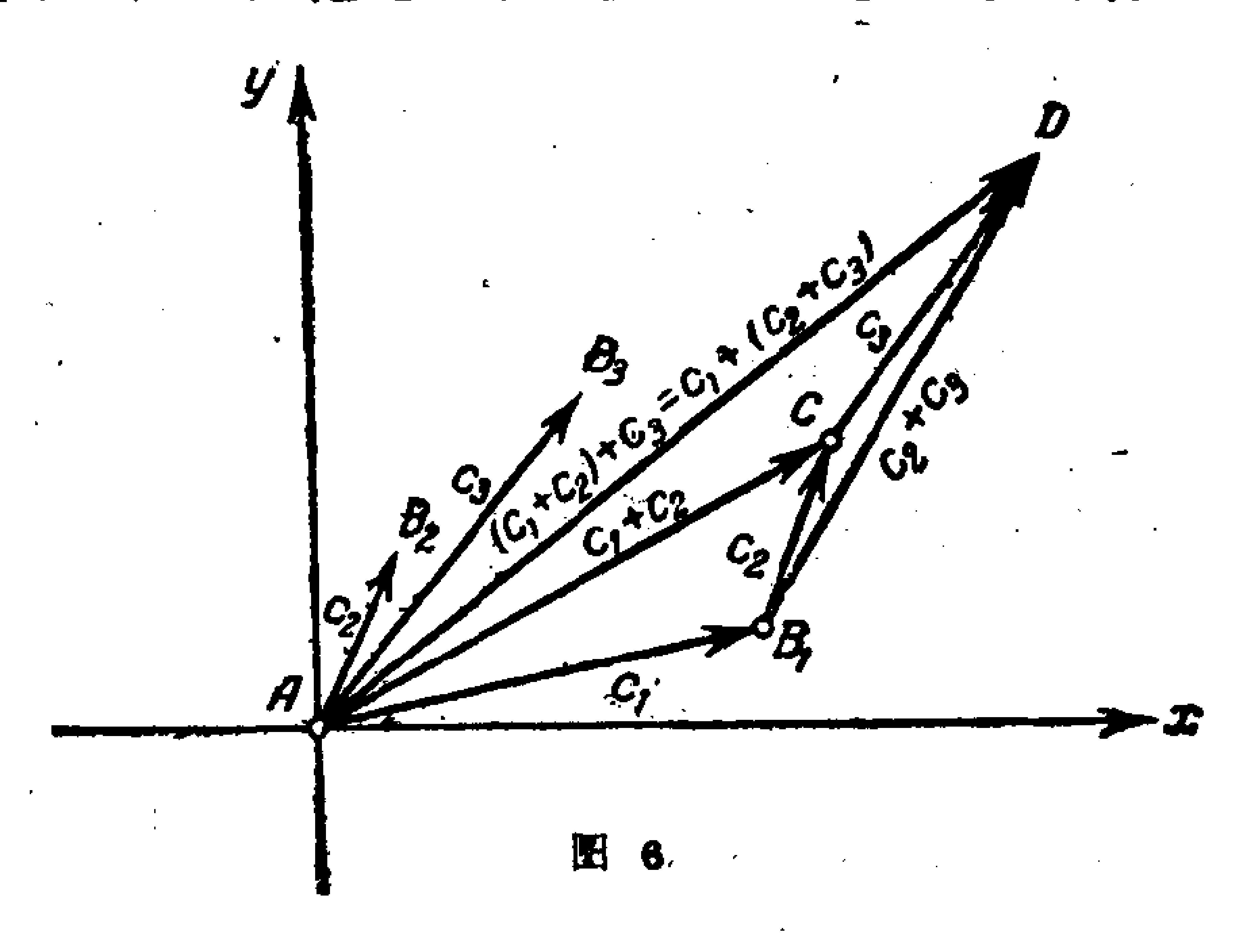


图 6

出了同一个向量 AD。

8. 在轉到乘法以前，我們先把絕对值和幅角的概念搬用到复数上来。

設向量 AB 表示复数 c。向量 AB 的長就叫做 c 的絕对值，而 c 的幅角就是軸 Ax 的正方向和向量 AB 的交角。这个角可以就反时針运动的方向計算，这时候它具有正值，或者沿时針运动的方向計算，这时候它具有負值；此外，还可以随便把它加上360° 的任何整数倍。

跟实数一样，数目 c 的絕对值和幅角分别記作：$|c|$ 和 $\operatorname{Arg} c$。和实数的情况比較起来，不同的是：虚数的幅角不等于 0° 和 ±180°，而实数（不等于 0 的）的幅角可以是 0°（如果它是正数）或 ±180°（如果它是負数）。

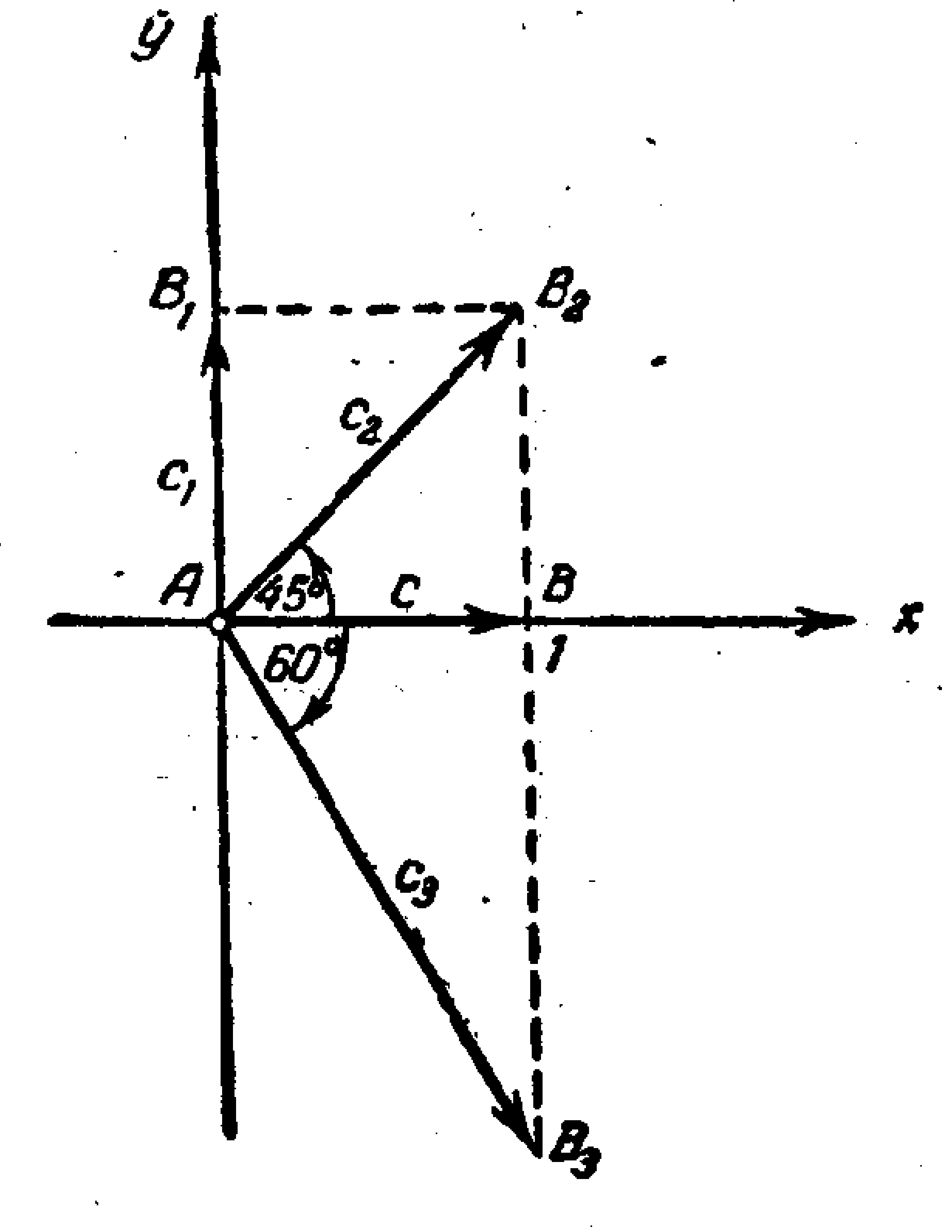


图 7.

在图 7 上画了向量 AB、AB_1、AB_2 和 AB_3，它們分別表示复数 c、c_1、c_2 和 c_3。讀者很容易証明下面的式子成立：

$$|c|=|c_1|=1,\quad |c_2|=\sqrt{2},\quad |c_3|=2;$$

$$\operatorname{Arg} c=0°,\ \operatorname{Arg} c_1=90°,$$

$$\operatorname{Arg} c_2=45°,\ \operatorname{Arg} c_3=-60°(\text{或 } 300°).$$

9. 在引进复数的絕对值和幅角这两个概念以后，我們就可以来談复数的乘法規則了。在字面上，它和相应的实数乘法規則是一致的：要用复数 c_2 去乘复数 c_1 ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$)，就必須把 $|c_2|$ 去乘表示 c_1 的向量的長(不变更这向量的方向)，然后把已經改变了的向量繞 A 点轉一个角，这个角等于 c_2 的幅角；得到的向量就表示乘积 c_1c_2。例如，乘积 c_1c_2 是用向量 AD 表示的(图 8)，而乘积 c_2c_3 是用向量 AE 表示的(图 9)；

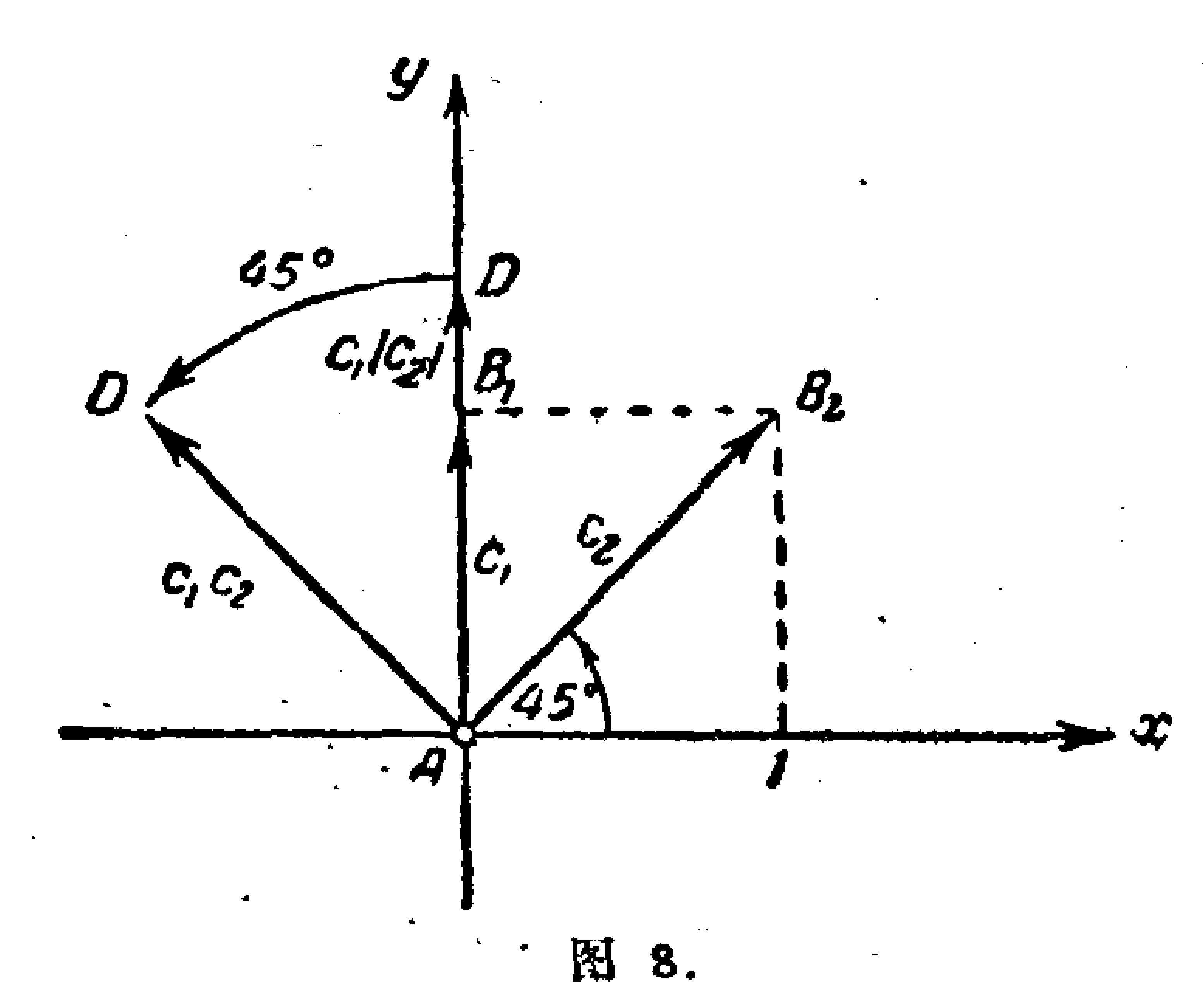


图 8.

对于乘法規則，还必須加上一点，就是当其中有一个因子等于零的时候，乘积也等于零。

如果把乘法規則运用在乘积 c_2c_1 (因子次序改变了)，那末，就应該把表示 c_2 的向量的長改变 $|c_1|$ 倍，并且把已經改变的向量繞 A 点轉一个角，这个角等于 c_1 的幅角。显而易見，得到的結果和乘积 c_1c_2 一样：在这兩种情况，得到的向量的長都是 $|c_1|\cdot|c_2|$，而 Ax 和这个向量的交角都等于 $\operatorname{Arg} c_1 + \operatorname{Arg} c_2$。

于是，
$$c_1c_2 = c_2c_1,$$
这就是說，对于复数乘法，交換律是成立的。

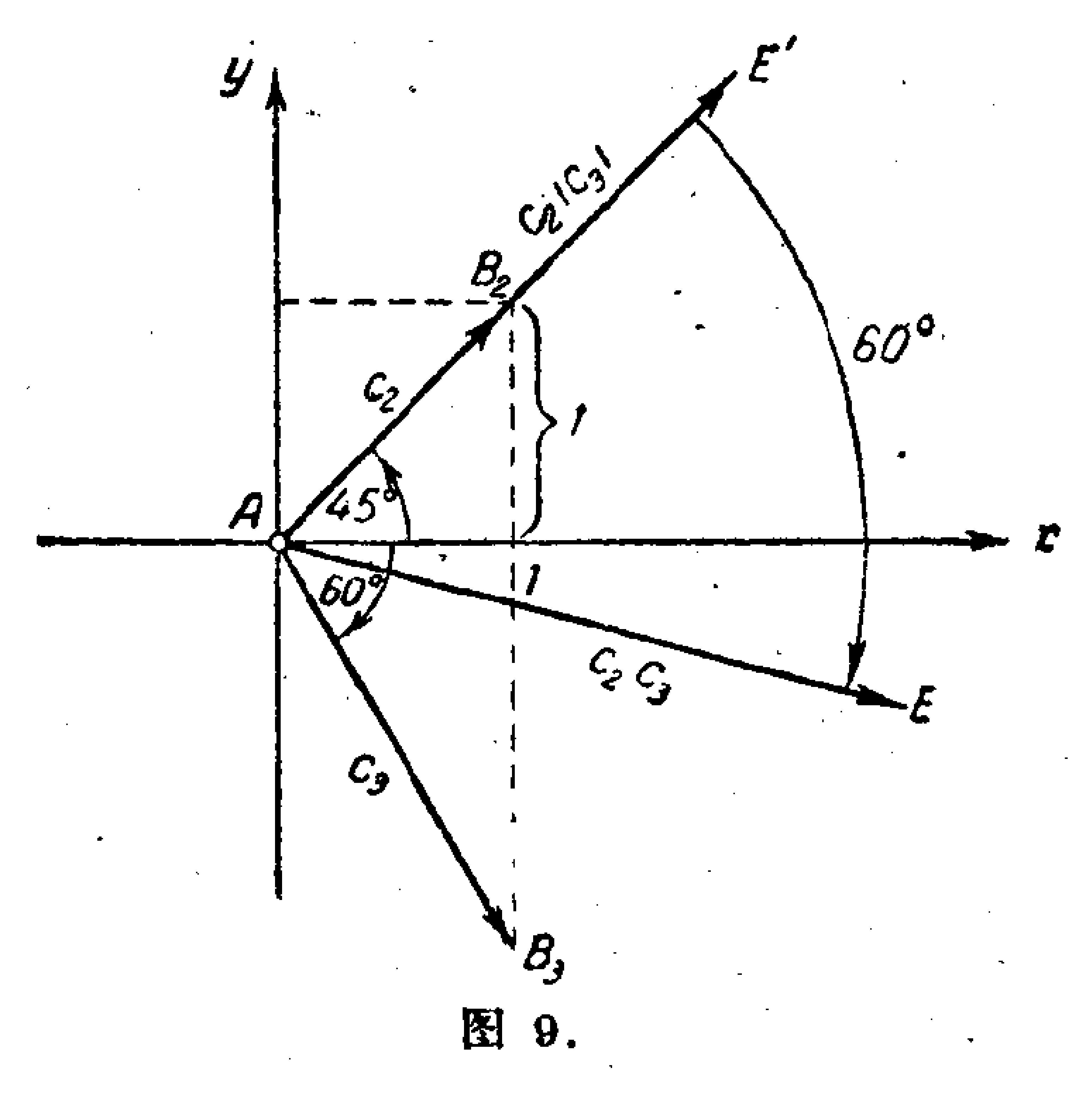


图 9.

同样地，結合律也成立：

$$(c_1c_2)c_3=c_1(c_2c_3).$$

事实上，所討論的这兩个乘积，都是由同一个向量表示的；这向量的長是 $|c_1|\cdot|c_2|\cdot|c_3|$，$Ax$ 軸和它的交角等于 $\mathrm{Arg}c_1+\mathrm{Arg}c_2+\mathrm{Arg}c_3$.

最后，我們来証明分配律成立：

$$(c_1+c_2)c_3=c_1c_3+c_2c_3.$$

在图 10 上，向量 AB 表示和数 c_1+c_2；如果保持 AB_1 和 AB_2 的方向不变，把三角形 AB_1B 各边的長乘以 $|c_3|$，就得到三角形 AK_1L_1，它和三角形 AB_1B 相似. 这个三角形由向量 AK_1、K_1L_1、AL_1 作成，这三个向量是从向量 c_1、c_2 和 (c_1+c_2) 把各边的長都变更 $|c_3|$ 倍（方向不变）得到的. 現在把三角形 AK_1L_1 繞 A 点轉 $\mathrm{Arg}\,c_3$ 度角；就得到三角形 AKL. 按乘法

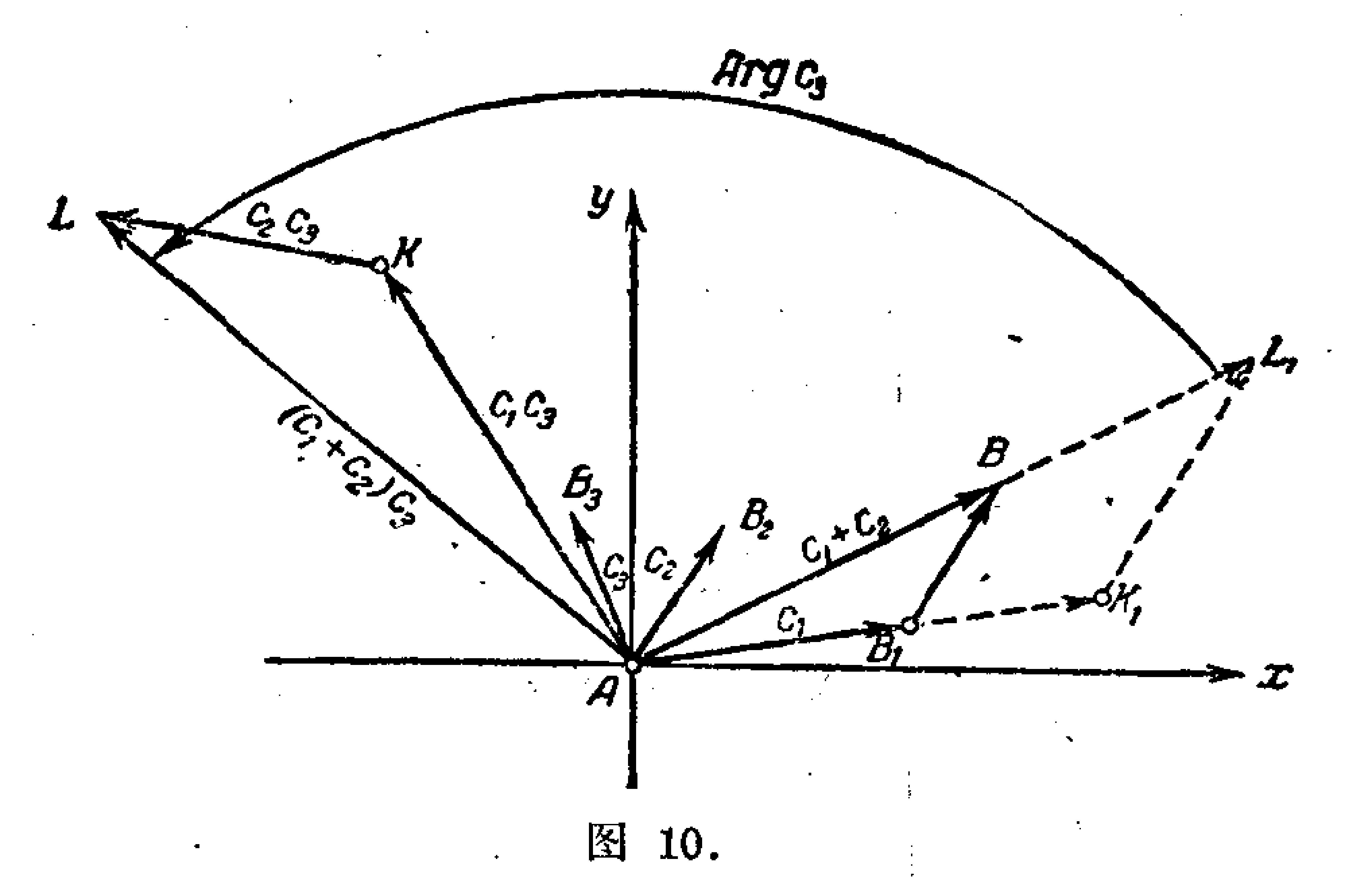


图 10.

规則，向量 AK 是表示 c_1c_3，KL 是表示 c_2c_3，AL 是表示 $(c_1+c_2)c_3$。按加法規則，从这个三角形可以得到：

$$c_1c_3+c_2c_3=(c_1+c_2)c_3,$$

这也就是要証明的。

10. 减法和除法运算，在定义上就是加法和乘法的逆运算。这就是說，如果有复数 c_1、c_2 和 d，而 $c_1=c_2+d$，也就是 c_1 是 c_2 跟 d 的和，那末我們就可以把 d 叫做 c_1 跟 c_2 的差，写作 $d=c_1-c_2$。把 c_2、d 和 c_1 之間的这种关系用图表示出来（图11），我們就可以看到，如果把 B_2 点（表示减数的向量的終点）和 B_1 点（表示被减数的向量的終点）用一向量連接起来，并且把前一点作为該向量的始点，后一点作为該向量的

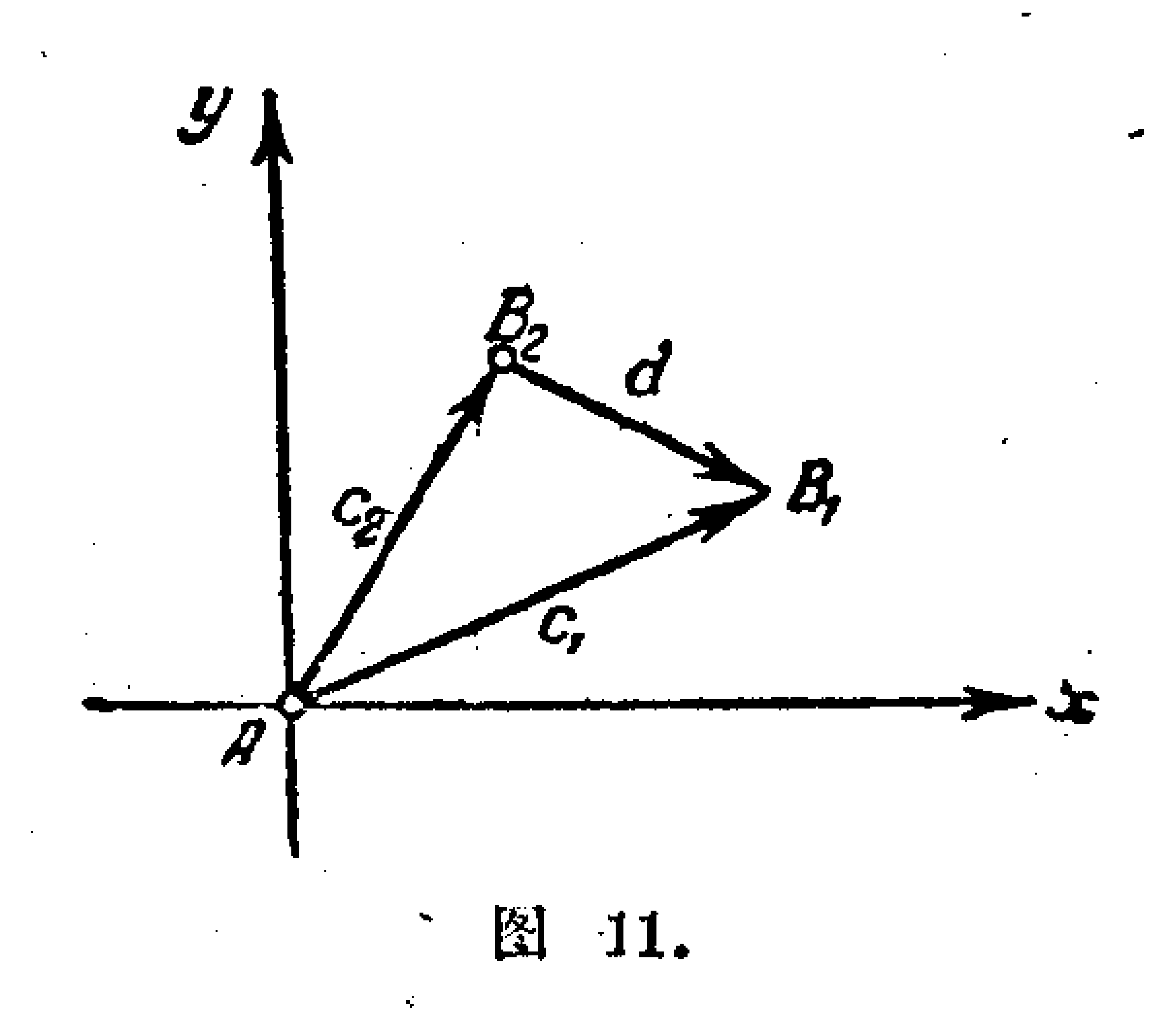


图 11.

終点，就得到了表示差 c_1-c_2 的向量。

同理，如果有复数 c_1、c_2 $(c_2\neq 0)$ 和 r，$c_1=c_2r$，也就是說，如果 c_1 是 c_2 和 r 的积(图 12)，我們就把 r 叫做 c_1 和 c_2 的商，写作 $r=c_1\div c_2$ 或 $r=\frac{c_1}{c_2}$。

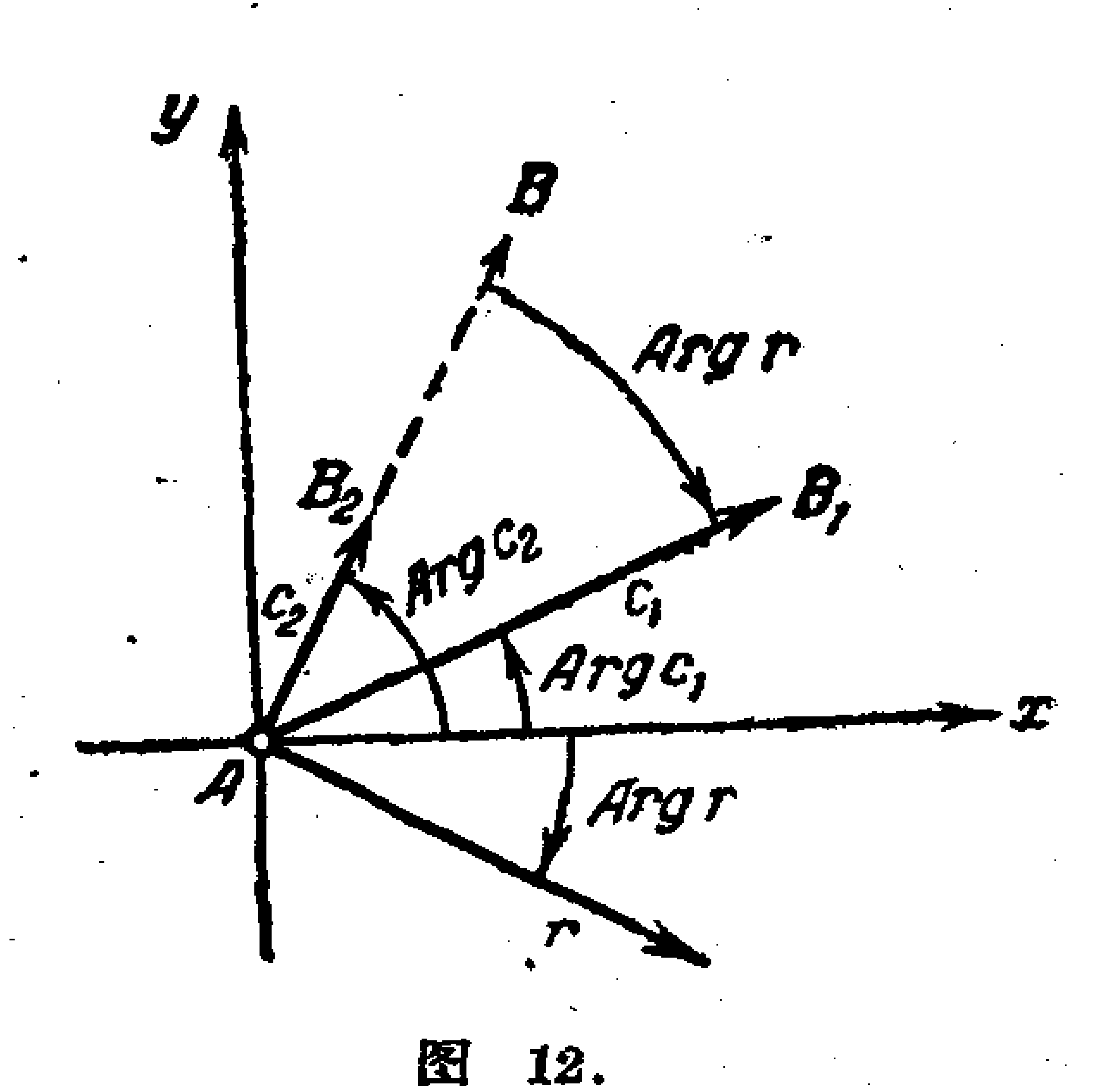


图 12.

从这里可以推知，$|r|$——表示 r 的向量的長——是 $\frac{|c_1|}{|c_2|}$，$\operatorname{Arg} r$ 等于角 B_2AB_1，这个角是按照从 AB_2 到 AB_1 方向計算的(在图12上，这个方向是順时針旋轉的，因而这角应該看作負角)。

我們来注意一些特殊情形。如果 c_1 和 c_2 是由平行而且方向一致的向量来表示的，那末角 B_2AB_1 等于 $0°$，因而 $\operatorname{Arg} r=0°$，也就是 r 是一个正的实数。如果 c_1 和 c_2 是由平行但方向相反的向量来表示的，那末角 B_2AB_1 等于 $180°$，r 是一个負的实数。

总結起来，可以說，复数的加法和乘法跟实数的情形一样，适合于交換律、結合律和分配律；而減法和除法也跟实数的情形一样，在定义上就是加法和乘法的逆运算。因此，代数学中适合于实数的一切运算規則和公式，根据运算的定义和提到的規則，对于复数也应当保持有效。例如：

$$(c_1+c_2)(c_1-c_2)=c_1^2-c_2^2,$$

$$(c_1+c_2)^2=c_1^2+2c_1c_2+c_2^2,$$

$$\frac{c_1}{c_2}+\frac{c_3}{c_4}=\frac{c_1c_4+c_3c_2}{c_2c_4}\qquad (c_2\neq 0, c_4\neq 0)$$等等。

11．讀者在学习数学的时候，曾經不止一次地遇到过数的概念的扩充(推广)：在算术中引进分数时，在代数中引进負数，以及后来引进无理数时，就都是这样的。数的概念的每一次新的扩充，会使在当时还不可能解决或根本沒有意义的某些問題有可能得到解决。比如說，分数的引用就可以使兩个数目在除数不等于零的所有情况下都可以相除，例如拿3来除4或拿5来除2；負数的引用就可以使减法在任何情况下都能够进行，例如从2减去5；无理数的引用就可以使任何綫段的長，和單位長不可通約的，都能够用数来表示，例如边長等于1的正方形的对角綫的長。然而單只限于实数，我們就不能够开出負数的平方根了。现在我們来証明，引用了复数就可以解决这个問題。自然，复数c的平方根(用符号$\sqrt{c}$表示)，我們指的是某个复数a，它的平方(就是a的自乘)等于c。換句話說，$a=\sqrt{c}$就是$aa=c$。設c是一个負数，例如$c=-1$；要想求$\sqrt{-1}$，我們就应当解方程$a^2=-1$。拿a来乘a，这就是說，先拿$|a|$去乘表示a的向量的長，也就是先拿同样的長度去乘，而不改变a的方向；然后，把得到的向量繞A点轉一个等于$\operatorname{Arg} a$的角。显而易見，求得的向量的長等于$|a|^2$。但是，求得的向量应当表示数目-1；因此它的長等于一个單位。于是，$|a|^2=1$，因而$|a|=1$(向量的長永远不会是負的)。再有，表示a^2的向量和Ax軸的交角等于$\operatorname{Arg} a+\operatorname{Arg} a=2\operatorname{Arg} a$；另一方面，$a^2=-1$，因而这个角应当等于$+180°$或$-180°$。所以$2\operatorname{Arg} a=\pm 180°$，于是$\operatorname{Arg} a=90°$或$\operatorname{Arg} a$

$=-90°$. 因此，我們已經得到了兩个不同的向量 AC 和 AC'，表示 $\sqrt{-1}$ 的兩个不同的值(图13)。向量 AC 表示的虛数記作 i，叫做**虛單位**；我們有：$|i|=1$, $\text{Arg}\, i=90°$。容易明白，向量 AC' 表示的虛数可以用 -1 乘 i 的方法从 i 得出。实际上，要用乘法規則来达到这个目的，就应当用 $|-1|=1$ 来乘 AC 的長(因此，向量 AC 不变)，然后繞 A 点轉一个角 $\text{Arg}\,(-1)=180°$；得到了向量 AC'。因而，和这向量相对应的虛数是 $i(-1)$ 或 $-1\cdot i$，簡写作 $-i$。于是，$\sqrt{-1}=\pm i$。

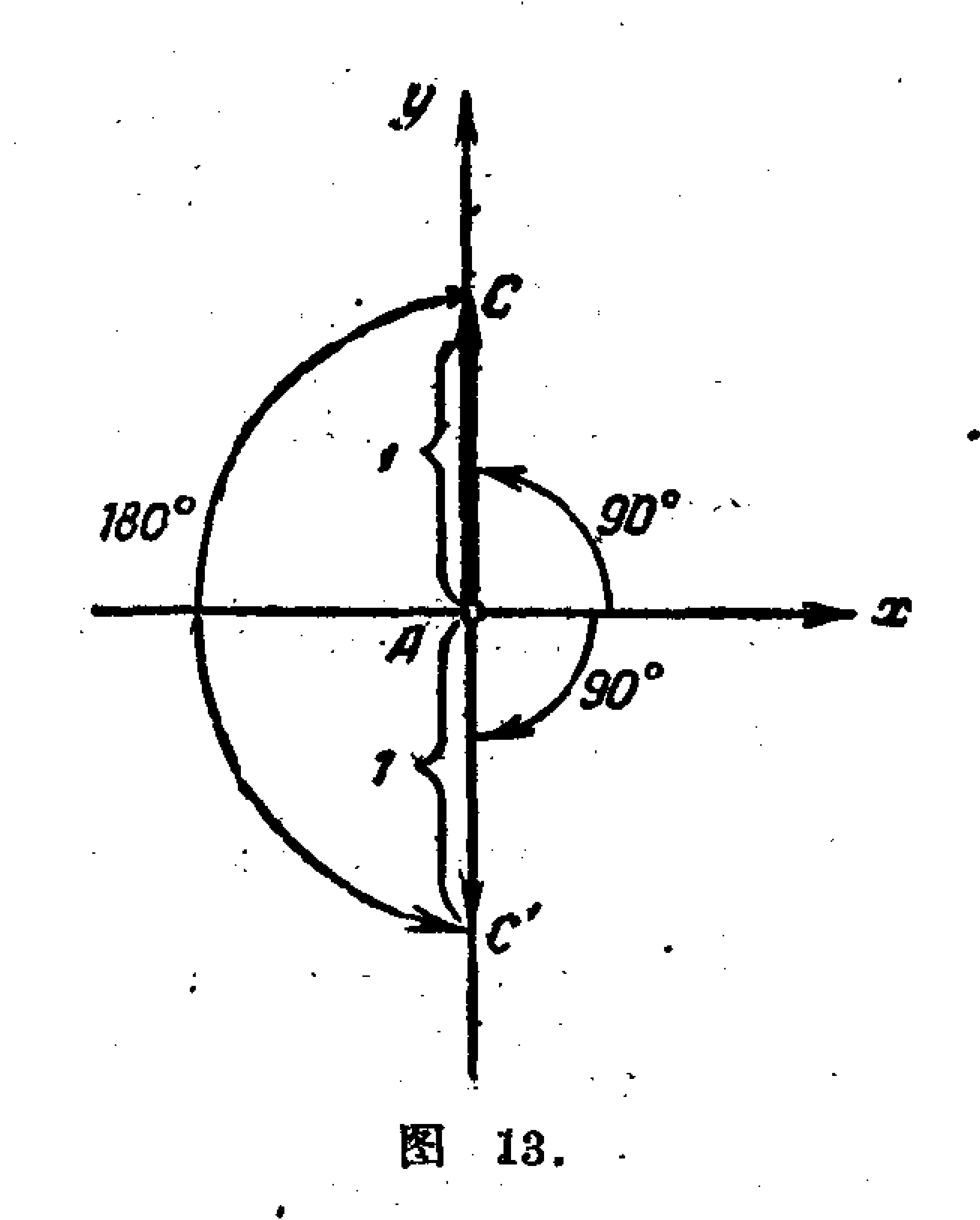


图 13.

12. 我們現在来討論 Ay 軸(或和它平行的軸)上的任意向量 AD(图 14)。設它的長等于 l。如果这个向量的方向和 Ay 軸的正方向一致(在 Ax 之上)，那末它表示的虛数 c 可以用正数 l 乘 i 得出，因此，$c=l\cdot i$，或簡写作 $c=li$。

如果 AD 的方向和 Ay 的正方向相反，那末数 c 可以用負数 $-l$ 乘 i 得出(或者用 l 乘 $-i$ 得出)；因此，在这种情形，$c=(-l)\cdot i$，或簡写作 $c=-li$。

由此可見，在 Ay 軸(或和它平行的軸)上的任何(長度不等于 0 的)向量，都表示 $\pm li$ 形式的虛数，在这里，取 $+$ 号或取

一号，是由向量的方向跟Ay的正方向相同与否来决定的。由于这种原因，Ay轴叫做虛軸。Ax轴所有的向量都表示实数，它叫做实軸。

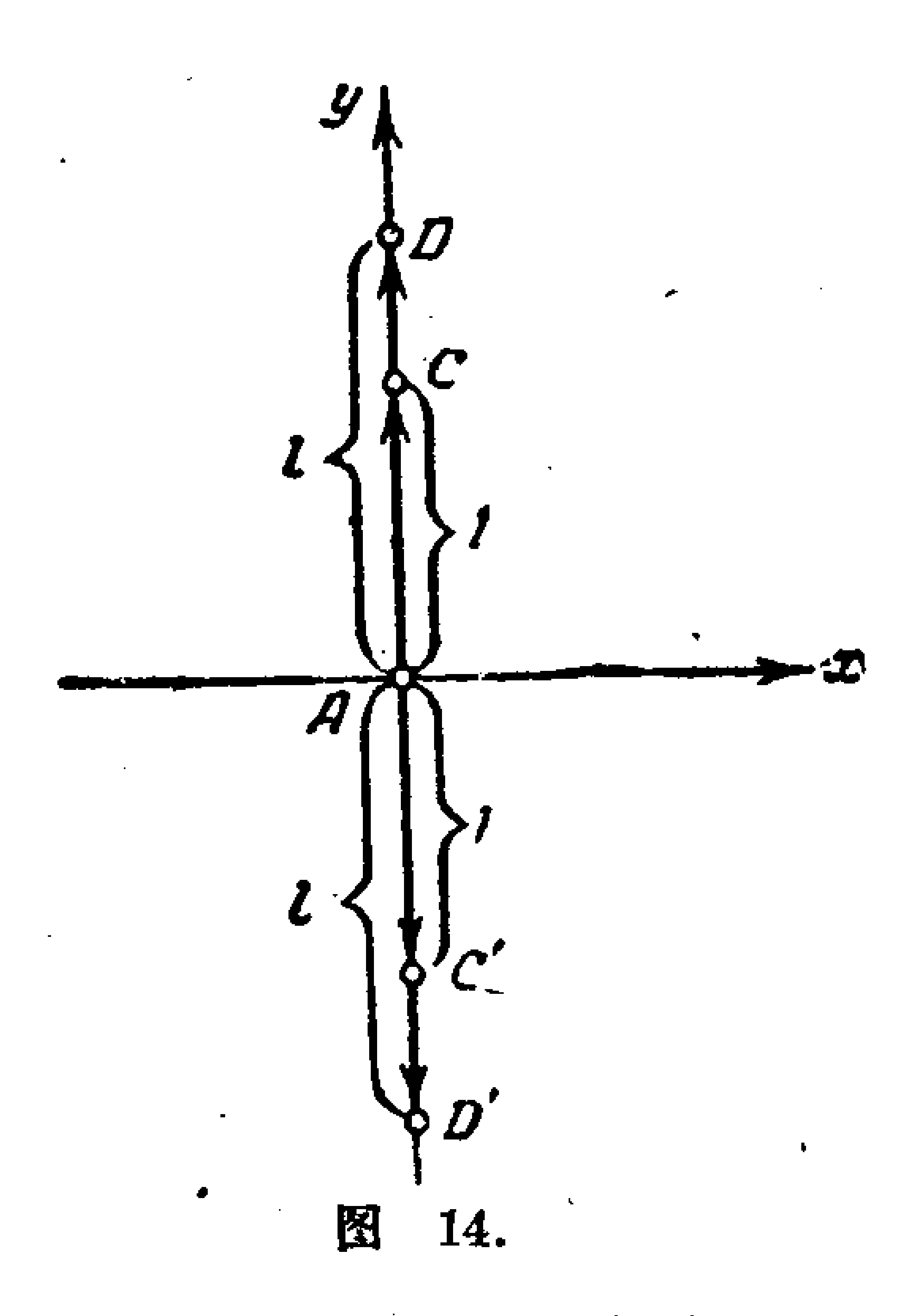


图 14.

我們現在来討論不在任何軸上、也不和軸平行的任何向量$A'E'$。照图15指示的作图方法，我們可以把这个向量表示的数c表示成兩个别的数的和：一个由平行于Ax（或在Ax上）的向量$A'B'$表示，另一个由平行于Ay的向量$B'E'$表示。但是，$A'B'$表示某一个实数a，$B'E'$表示某一个虛数bi，因此$c=a+bi$。

这样，我們已經把虛数c用实数a和b以及虛單位i表示出来了。因为向量$A'E'$和任何軸都不平行，所以$a\neq 0, b\neq 0$。容易明白，平行于某一軸的向量表示的数，也可以写成类似的形式。就是說，如果向量和实軸平行，它表示的是$a+0\cdot i$形式的数，如果向量和虛軸平行，它表示的就是$0+bi$形式的数。

图 15.

由此可見，每一复数c都可

以表示成 $c=a+bi$ 的形式，在这里，a 和 b 是实数，i 是虚單位。

13. 現在来总結一下。我們开始的时候用在同一直綫上的向量来表示实数，把实数运算化成向量运算以后，就使实数运算具有了几何形式，然后我們把平面上的各种向量看成是表示更普遍形式的数——复数，这种数只有在特殊情况下(当向量在 Ax 軸上或和軸平行时)才是实数。把直綫上向量的运算推广到平面上的向量上去，我們就引进了加法运算和乘法运算(然后是它們的逆运算——减法和除法)，并証明，它們也服从和实数运算一样的規律。这时候，对于复数本身，我們知道的，只是它們都可以用向量来表示，并且任何兩个向量，如果長相等、互相平行、方向一致，就表示同一个复数，長不等、或方向不同，就表示不同的复数。我們証明：复数可以使 -1 开方，并且引入了虚單位 i，它是 $\sqrt{-1}$ 的兩个值中的一个(幅角是 $90°$ 的那一个根的值)。最后，根据复数运算的規則，我們証明了，每一个复数 c 都可以表示成 $c=a+bi$ 的形式，在这里，a 和 b 是实数。

由此可知，c 是由 a 和 bi 兩項組成的；其中的一个——a——由实軸上的向量来表示，可以看作是实数 a 和实單位的积；另一个——bi——由虚軸上的向量来表示，可以看作是实数 b 和虚單位 i 的积。复数的这种結構，使我們了解到，为什么所有这些数都叫做复数(就是复合数)的道理。

注意，我們把 a 叫做数 c 的实部分，把 b 叫做虚部分。例如，数 $c=3-2i$ 的实部分等于 3，虛部分等于 -2。

14. 如果用从同一点 A 开始的向量来表示复数 c，那末不相等的复数对应着不相同的向量，反过来也是一样：不同的向量对应着不同的复数。設 $c=a+bi$；那末表示数 c 的向量 AE 的終点，就具有横坐标 a 和縱坐标 b（图 16）。

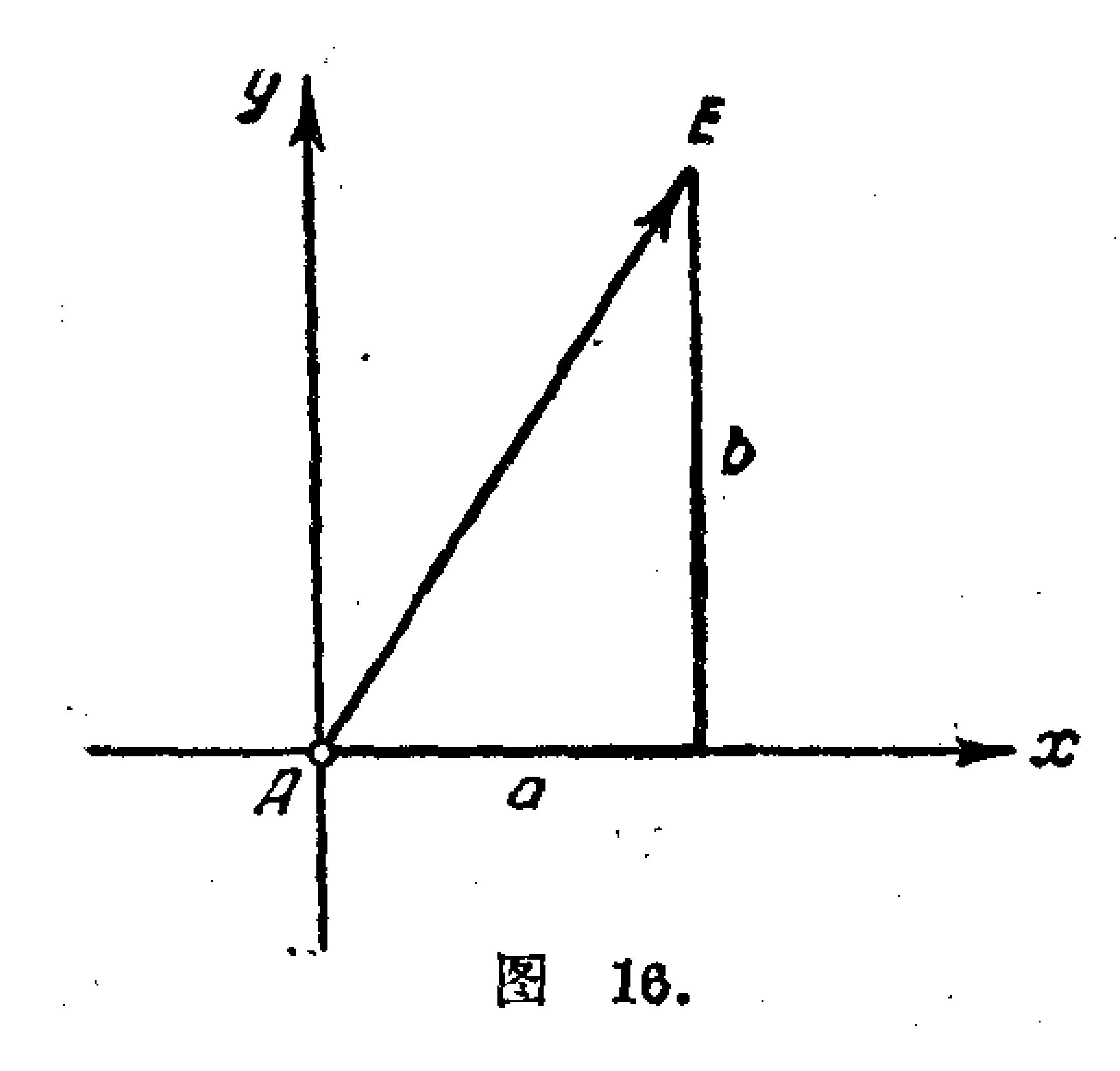


图 16.

由此可見，如果表示数 $c=a+bi$ 的向量的始点落在坐标軸的原点 A，那末数 a 和 b 就是这个向量的終点的坐标。采取这种看法，在几何学上就不但可以用向量来表示复数，而且还可以用点来表示复数。也就是每一个复数 $a+bi$ 都可以用坐标是 a 和 b 的一个点 E 来表示；反过来也一样：坐标是 a' 和 b' 的点 E' 可以看作是表示复数 $a'+b'i$ 的。

图17 上画的点 E_1、E_2、E_3、E_4 和 E_5，依次表示下列諸数：-1，i，$-i$，$1+i$，$1-i$。

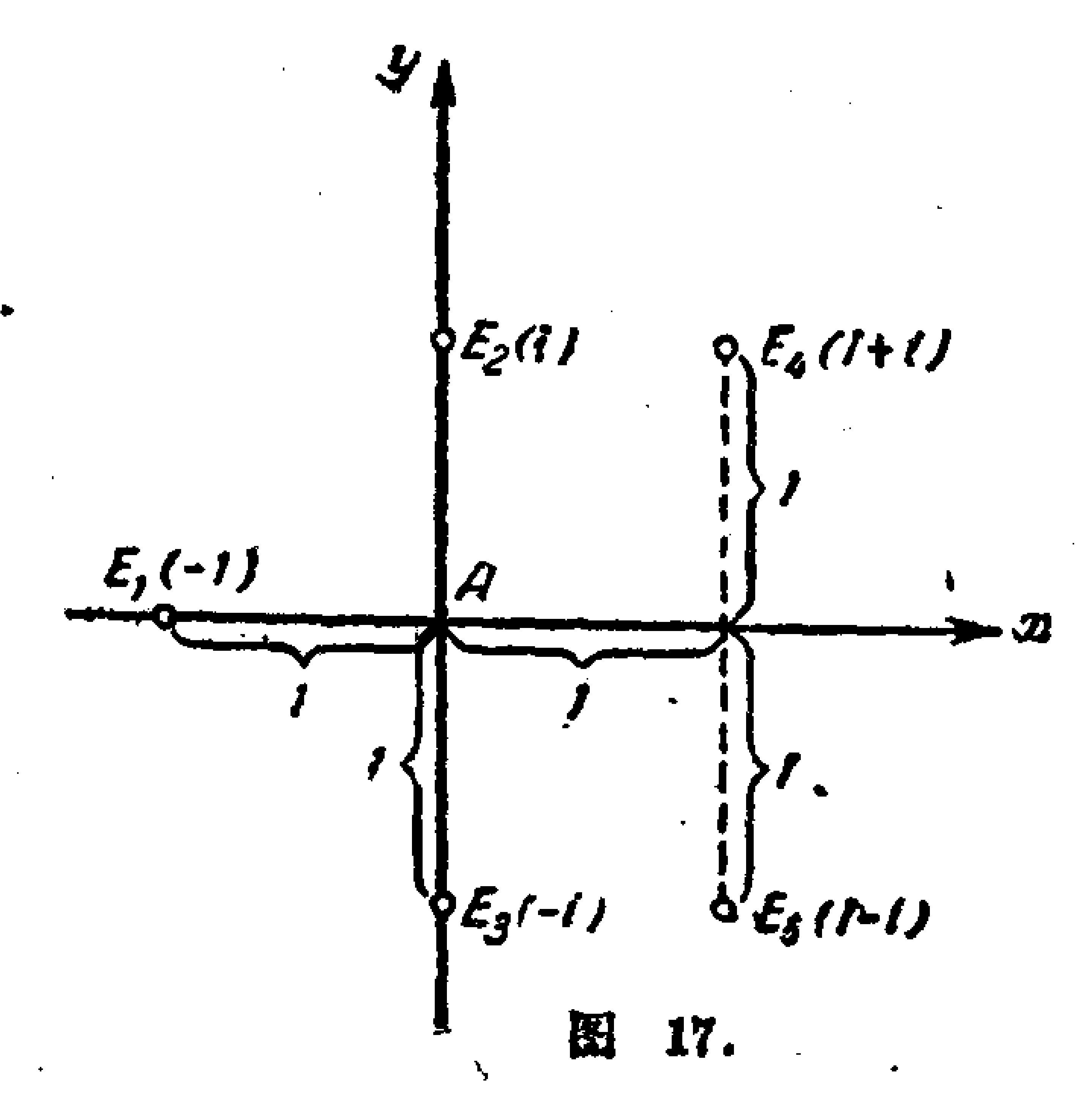


图 17.

以后为簡便起見，我們把复数 z 本身以及表示它的点 E 都叫做“点 z”。

例如，“点 $1+i$”是指复数 $1+i$ 本身和表示它的点 E_4（图17）。在文字里会看得出它表示的究竟是哪一个意义。但是，最好能养成习惯，不去思索这个問題，而把这兩个意义看成同一个意义。

15. 設 z 是某一个点。如果 z 加上了某一数 a，就得到新的点 $z'=z+a$。显而易見，从点 z 轉变到点 z'，可以用移动（或搬动）向量 a 的办法得出，也就是把点 z 沿向量 a 的方向移动一个和这向量的長相等的距离（图 18）。选取适当的 a，就可以得到点 z 的任何移动位置。例如，假使点 z 需要沿軸 Ax 的正方向移动一个單位，我們就取 $a=1$；于是得到点 $z'=z+1$。又，假使 z 需要沿軸 Ay 的負方向移动兩个單位，我們就取 $a=-2i$；于是得到点 $z''=z+(-2i)=z-2i$（图 19）。

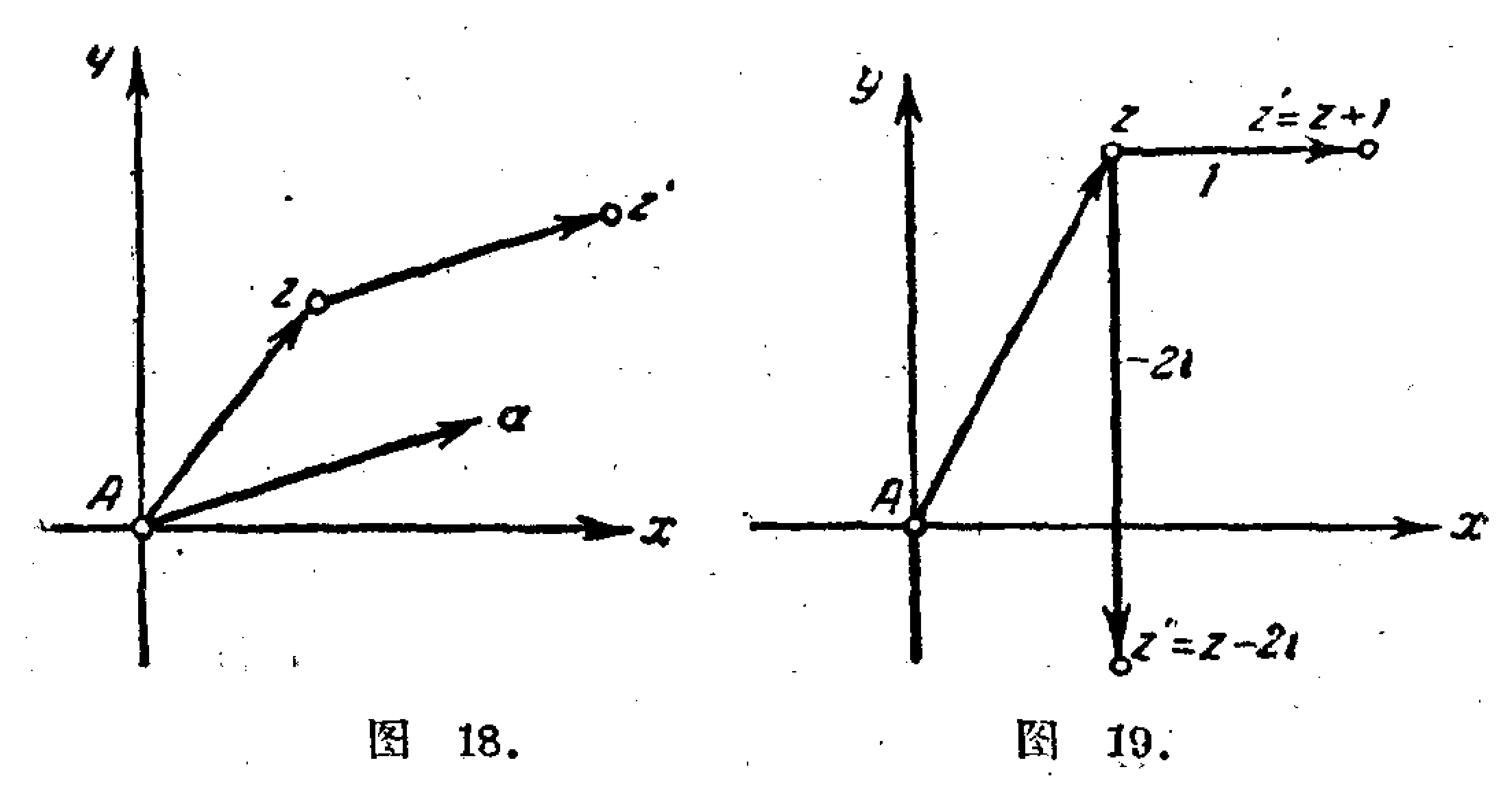


图 18.　　图 19.

由此可見，加法运算 $z'=z+a$ 在几何上就是表示点 z 移动一个向量 a。

16. 我們現在来討論用某一个数 $c\neq 0$ 来乘 z 的乘法运算。要用 c 乘 z，就必須用数 $|c|$ 去乘向量 AE 的長（就是数

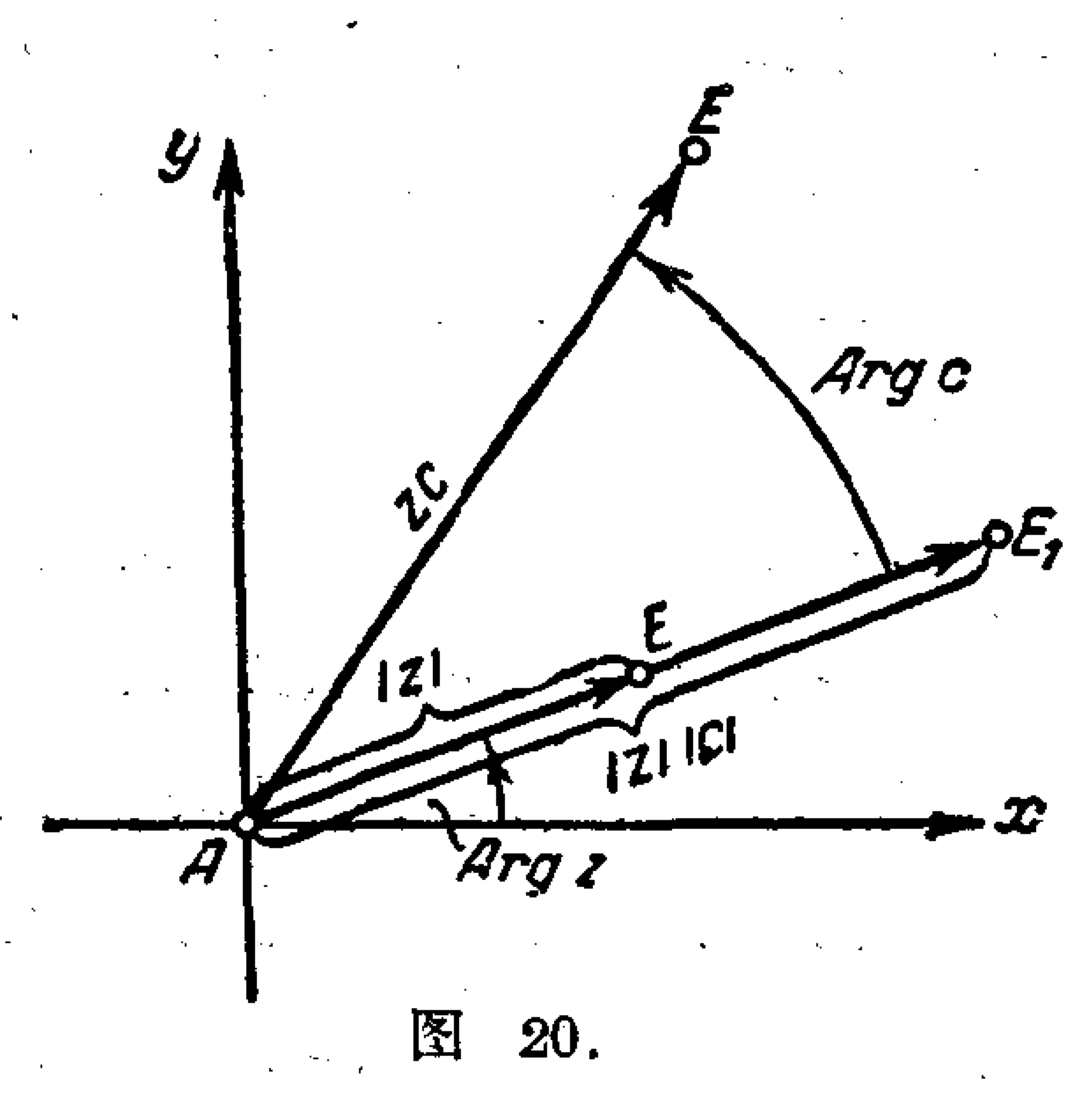


图 20.

$|z|$)，并且把得到的向量轉动一个等于Arg c 的角（图 20）。前一个运算不改变向量 AE 的方向，而只能变更它的長度。就是說，如果 $|c|<1$，这个長度就縮短，如果 $|c|>1$，这个長度就增大，如果 $c=1$，那末它就保持不变。我們把这运算叫做把向量 AE 伸長到 $|c|$ 倍。在这里，“伸長”一詞是在附有条件的意义下来理解的；事实上，伸長只是在 $|c|>1$ 时才发生，这时候，向量 AE 的長在乘过后，就加長到了 $|c|$ 倍。但是，当 $|c|=1$（向量 AE 的長不变）以及 $|c|<1$ 时（乘过后向量 AE 的長縮短），我們还是說伸長。

如果 c 是一个正的实数，那末 Arg $c=0$。

在这种情形，轉动角度 Arg c，由伸長而得到的向量 AE_1 并不改变；因此，点 E_1 就表示乘积 zc。可以这样說，用正的实数 c 乘 z，在几何上就是表示向量 AE（表示 z 的）伸長到 c 倍。变动 c，可以得出向量 AE 的各种倍数的伸長。例如，要得到兩倍的伸長，应該用 2 乘 z；要得到 $\frac{2}{3}$ 倍的伸長，应該用 $\frac{2}{3}$ 乘 z。

如果因子 c 不是正的实数，那末Arg c 就不等于零。在这种情形，用 c 乘 z 就不只是向量 AE 的伸長，而且还要求把伸長了的向量繞 A 点轉一个Arg c 的角。因此，在一般情形，乘

法运算 $z\cdot c$ 既表示伸長(到 $|c|$ 倍)，也表示旋轉(一个 $\operatorname{Arg} c$ 的角)。在特殊情形，当 c 的絕对值等于1时，用 c 乘 z 就只是把向量 AE 繞 A 点轉一个 $\operatorname{Arg} c$ 的角。适当地选取 c，就可以使 AE 轉过任意的角度。比如說，要想使 AE 順正方向（反时針方向）轉90°角，那末就用 i 来乘 z；实际上，$|i|=1$，$\operatorname{Arg} i=90°$。要想使 AE 順負方向（順时針方向）轉 45° 角，那末就用复数 c 来乘 z，这个 c 的絕对值等于1，幅角等于 $-45°$。靠图 21 的帮助，很容易求出这个数来，在图 21 上，画了一点 C，它表示数 c。显而易見，C 点的坐标是这样：$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此，$c=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$。由此可見，用 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ 乘 z 跟把（表示 z 的）向量 AE 繞 A 点按負方向轉 45° 角是意义相同的。

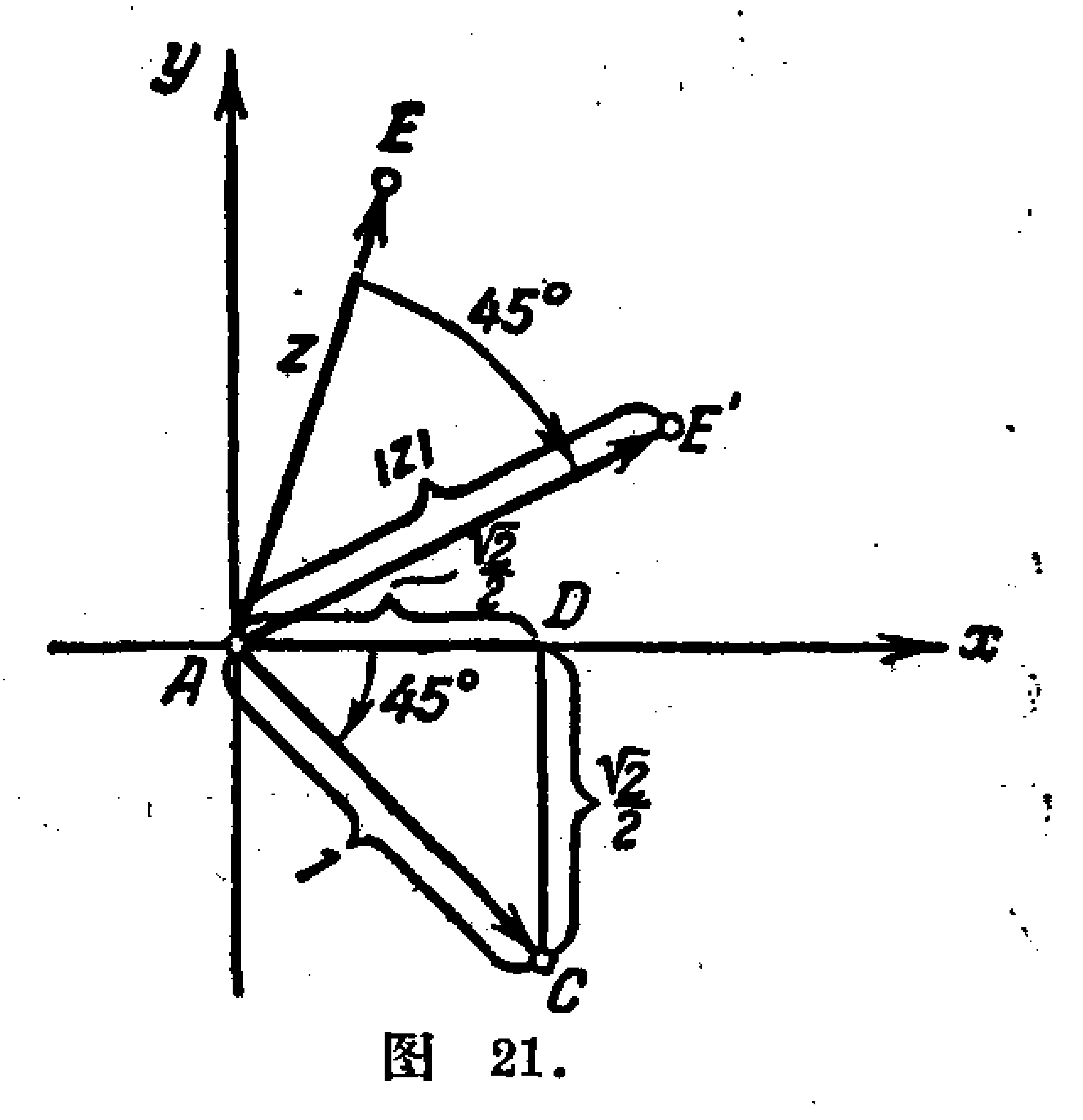


图 21.

17. 我們已經看到，公式 $z'=z+a$ 或 $z'=cz$ 把点 z 变到点 z'。現在讓我們来討論不是一个点、而是点 z 的一个无穷集合，这个无穷集合組成了某一个几何图形 P（比如說，是一个三角形；如图 22）。如果我們把公式 $z'=z+a$ 应用到每一个点 z，那末移动一个向量 a，就可以从旧的点 z 得到新的点 z'。由移动得到的一切点組成一个新的图形 P'。显然，如果把整个图形 P 作为一个整体，移动向量 a，我們也可以得到图形 P'。

这样看来，利用公式 $z'=z+a$，不但可以变换一个点，而且还可以变换整个图形（点的集合）。这个变换就是把图形移动向量 a。自然，新的图形和原来的图形是相等（重合）的。

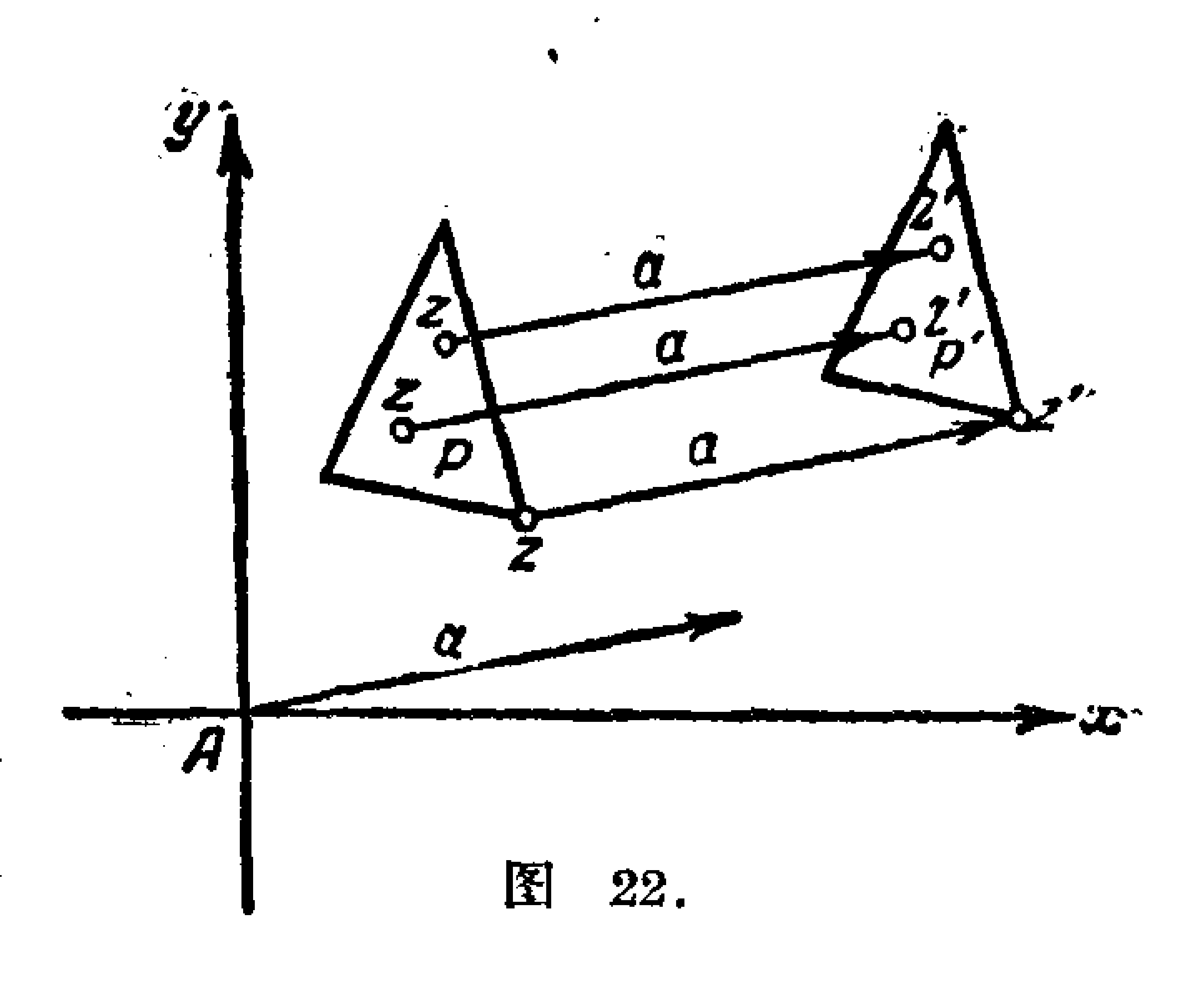


图 22.

18. 我們可以把公式 $z'=cz$ 应用到图形 P 的每一个点上。如果 c 是正的实数，那末在图形 P 上的每一个点 z 变换成了新的点 z'，而 z' 都在 A 点到 z 点的射綫上，同时比值 $\left|\frac{z'}{z}\right|$（就是点 z' 到 A 的距离和点 z 到 A 的距离的比）等于 c。这样的变换，在几何学上叫做**位似变换**，点 z' 和 z 叫做**位似点**，点 A 叫做**位似中心**，数 c 叫做**位似系数**。

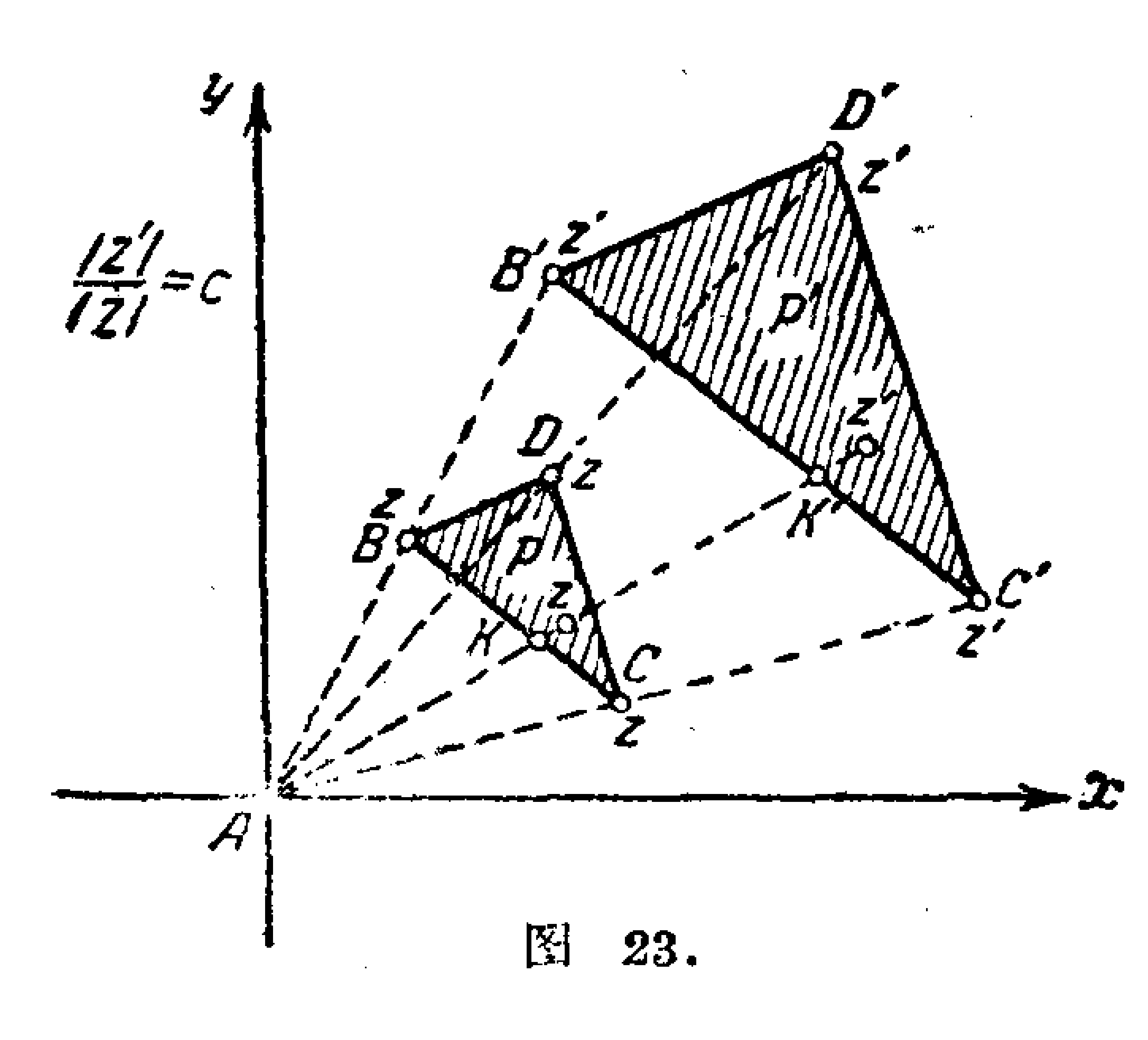


图 23.

位似变换的結果，把图形 P 上一切点的总集变换到組成图形 P' 的某些新的点的总集（图 23）。这个新的图形叫作已知图形 P 的**位似图形**。容易看出，当 P 是一个多边形（例如三角形）时，位似

图形P'也是一个多边形，并且和原来的多边形P相似。要証明这一事实，只要看图23上多边形P的一边BC上的点在位似变换时变到什么地方就行了。

如果点B变换到点B'，点C到点C'，那末把B'和C'用綫段联結起来以后，我們就知道，三角形ABC和$A'B'C'$是相似的（角A公有，而且夹角A的边相互成比例：$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=c$）。从这里就有边$B'C'$平行于$BC$，而且$\frac{B'C'}{BC}=c$。設$K$是边$BC$上的一点；那末射綫$AK$和$B'C'$相交于某一点$K'$，三角形$AKC$和三角形$AK'C'$也相似，于是就知$\frac{AK'}{AK}=\frac{AC'}{AC}=c$。因此点$K'$是点$K$的位似点（位似中心是$A$，位似系数等于$c$）。于是可以断言：在边$BC$上的一切点，經过位似变换，都变换到了在边$B'C'$上的点；这样一来，边$B'C'$上的每一个点就会是边$BC$上的某一个点的位似点。由此可見，整个綫段$B'C'$是綫段$BC$的位似綫段。同样的推理应用到多边形$P$的所有的边上，便可以知道，所有的边都变换到了新的多边形P'的边，而且对应边兩兩平行，兩对应边長的比等于同一个数c：

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'B'}{DB}=c.$$

这样就証明了位似图形P和P'是相似的。

因此，用公式$z'=cz$（c是正的实数）不但能够变换一个点，而且能够变换整个的图形P。这个变换是位似变换，它的位似中心是A，位似系数等于c。如果P是一个多边形，那末变换到的图形P'也是多边形，而且和P相似。

19．現在，我們假定公式$z'=cz$里的数c不是正的。首

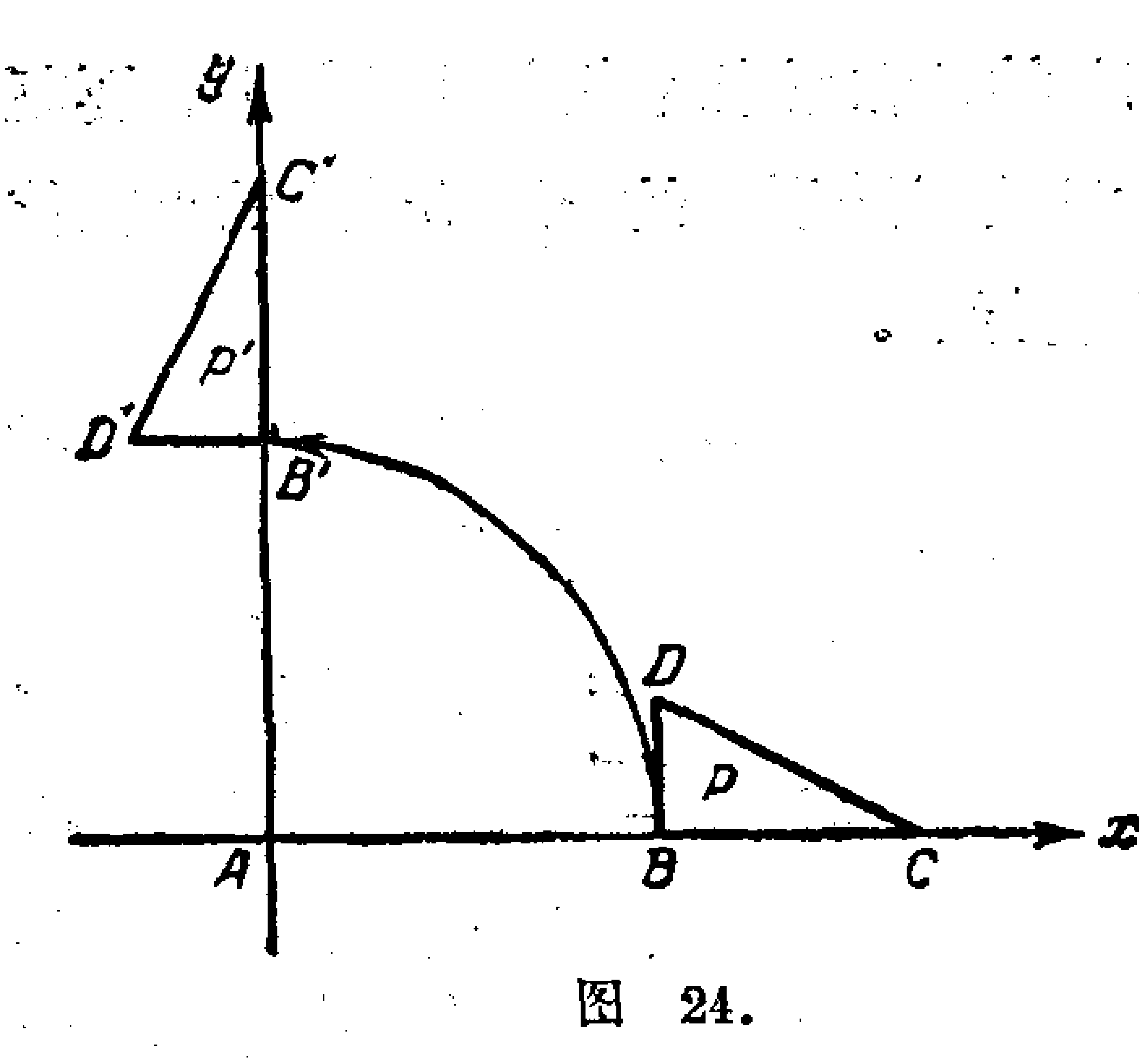
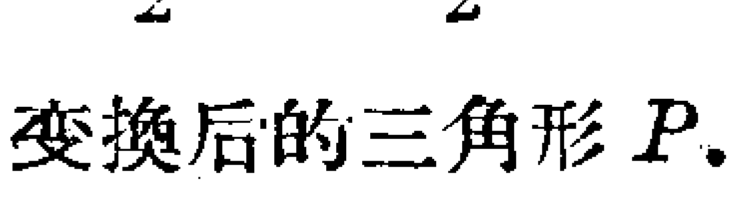


图 24.

先，設 $|c|=1$. 在这种場合，乘法运算就变成了把向量 Az 繞点 A 旋轉一个等于 c 的幅角的角. 如果把这个运算应用到图形 P 的每一个点 z 上，那末結果就是把图形 P 繞点 A 旋轉 $\operatorname{Arg} c$ 的角. 因此，用公式 $z'=cz$，其中 $|c|=1$，会使任何图形 P 变到图形 P'，P' 是由图形 P 繞点 A 旋轉 $\operatorname{Arg} c$ 的角得到的. 例如，取 $c=i$；因为 $\operatorname{Arg} i=90°$，于是 $z'=iz$ 就是把图形繞点 A 旋轉 90°. 图 24 表示的就是經过这个变換的一个三角形.

如果在公式 $z'=cz$ 里，不加条件 $|c|=1$，而只認为 c 是一个复数（不是正数也不是零），那末图形 P 的相应变換可以分作兩步来进行. 首先把它伸長 $|c|$ 倍，結果就是把图形 P 变換到位似图形 P_1，然后再把 P_1 繞点 A 旋轉 $\operatorname{Arg} c$.

图 25 表示的就是經过 $z'=\frac{i}{2}z$（$\left|\frac{i}{2}\right|$



$=\frac{1}{2}$, $\operatorname{Arg}\frac{i}{2}=90°$）变換后的三角形 P.

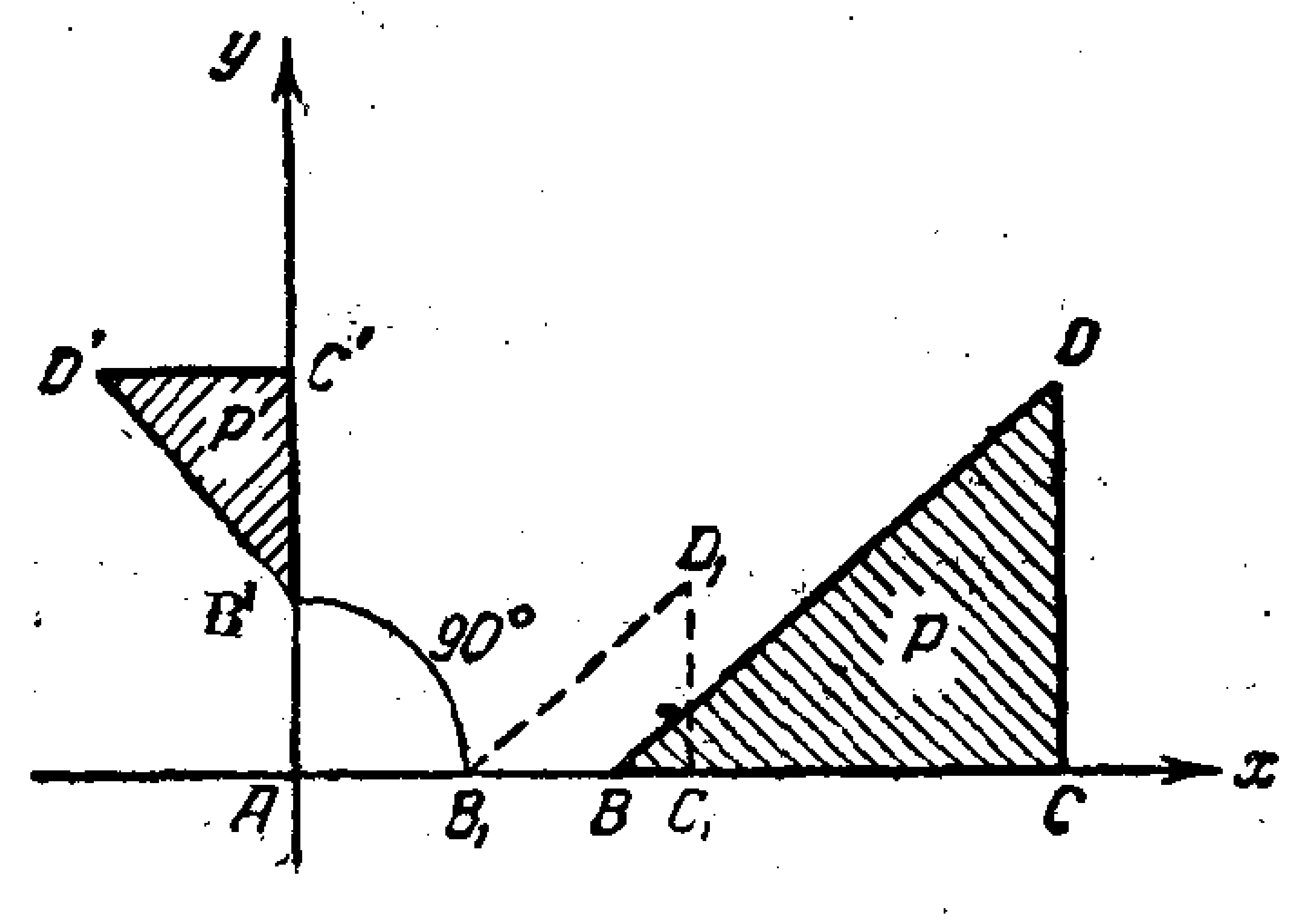


图 25.

20. 在公式 $z'=z+a$ 和 $z'=cz$ 里，我們可以把 z 看作自变数，把 z' 看作函数。这就是最簡單的复变数 z 的函数。对于 z 用任何一个复数常数进行加法、减法、乘法、除法以及乘幂(可以看作是乘法的重复)，我們就可以得到 z 的其他不同函数，例如：

$$z'=\frac{1}{z}, \text{或 } z'=z^2+cz+d, \text{或 } z'=\frac{z-a}{z-b} \text{ 等等。}$$

所有这样的复变函数，都叫做有理函数；因为这样的函数是靠运用所謂有理运算(加，减，乘，除)得来的。有理函数并不能包括所有的复变函数；例如，也可以确定并且研究如下形式的函数：$z'=\sqrt[n]{z}$，$z'=a^z$，$z'=\sin z$ 等等。但是在这本書里，我們只限于談有理函数，而且是最簡單的有理函数。

21. 我們已經看到，函数 $z'=z+a$ 或 $z''=cz$ 都相应于平面上图形的一定的几何变换。这也就是說，如果变数 z 跑过图形 P 上的点，函数 $z'=z+a$ 就跑过图形 P' 上的点，图形 P' 是从 P 移动向量 a 得来的；函数 $z''=cz$ 就跑过图形 P'' 上的点，图形 P'' 是从 P 作系数等于 $|c|$ 的位似变换、再繞点 A 旋轉 $\text{Arg}\, c$ 得来的。因此可以說：函数 $z'=z+a$ 产生移动变换，而函数 $z'=cz$ 产生位似变换和旋轉变换(如果 c 是正的实数，那末作的是一个位似变换；如果 $|c|=1$ 而 $c\neq 1$，那末作的是一个旋轉变换)。現在就发生了这样的問題：关于其他的复变函数特别是有理函数产生的变换可以說些什么呢？这个問題將在本書的后面加以討論。为了使讀者明确做这一个工作并不是无聊的，我們就在这里先告訴讀者，由有理复变函数产生的变换，是多种多样而且富于几何性質的，同时却具有某种普

遍的性質。这就是說，虽然經过这种变换，图形的形狀和大小一般說来是改变了，但是所考虑的图形的任何兩条綫間的夾角大小不变①。

当函数是 $z'=z+a$ 或 $z'=cz$ 这兩个特殊情况时，在变换得的图形里，角的不变性是直接由于我們討論的是移动变换、位似变换或旋轉变换的緣故。很有趣，这种現象也发生在任何有理复变函数所产生的变换中，并且也产生在其他的更普遍而复杂的复变函数所謂解析函数中。但是关于解析函数，这本小冊子是不可能討論了。

22. 在几何变换中，在变换得的图形里任何兩条綫之間的夾角大小不变时，这种变换就叫做**保角变换**，有时也叫做**保角映象**。

上面討論的位似变换和旋轉变换，都是保角映象的例子。下面我們再来举一个别的例子。現在还要說明，保角映象的定义要求的就是：在研究的图形里，**任何**兩条綫之間的夾角是保持不变的。我們来討論紧靠在軸 Ax 和 Ay 上的正方形 $ABCD$

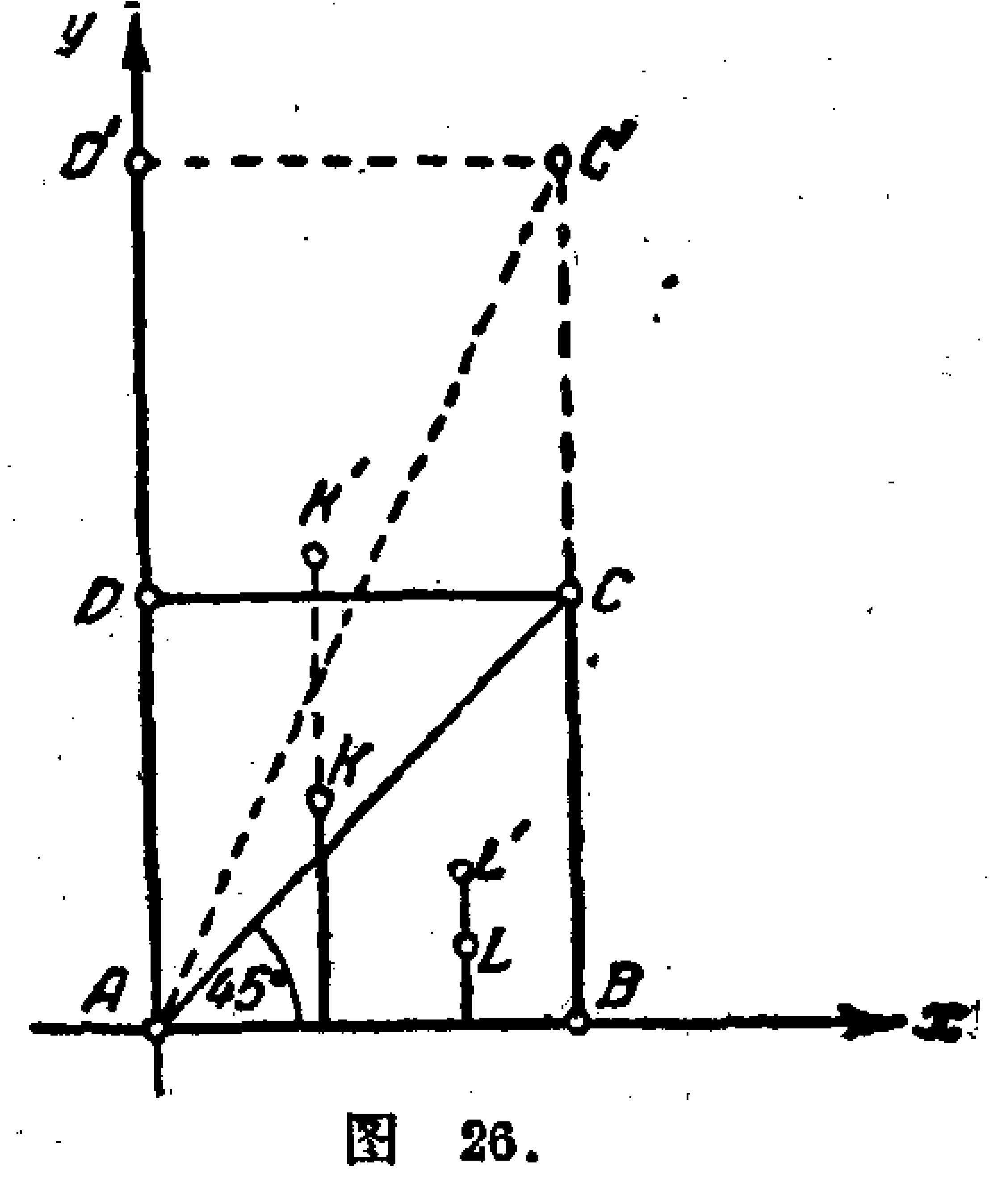


图 26.

① 严格說来，在这里可能有个别的点，以这些点作頂点的角是改变了，增加到二倍、三倍或一般說来增加到整数倍。但是，这样的点只是这个一般規則的例外。

(图 26)。現在把它变换一下，使在变换得的图形上各点的横坐标 x 不变，縱坐标 y 加倍。例如，点 K 变换到 K'，点 L 变换到 L'。如果我們把正方形上所有的点都这样变换一下，那末正方形 $ABCD$ 显然就变到了長方形 $ABC'D'$，这个長方形和原来的正方形有公共底边，但是高等于原来的兩倍。这时候，边 AB 变换到它本身(AB 上的一切点都保持原位，因为这些点的縱坐标是零，零的兩倍还是零)，AD 变换到 AD'，DC 变换到 $D'C'$，BC 变换到 BC'。当然，兩边的夾角，原来它們是直角，因此仍保持直角，这也就是說，角保持不变。但是，我們考察正方形的边 AB 和对角綫 AC 的夾角 BAC(图26)；这个角等于 45°。变换的結果，AB 保持原位，但是直綫 AC 却变到了直綫 AC'(为什么？)。因此，角 BAC 变到了另外一个(大一些的)角 BAC'，这也就是說，角并不是保持不变的。如果我們不考察角 BAC，而考察以正方形 $ABCD$ 里任意一点 Q 为頂点的角 PQC (图 27)，那末也很容易証明，經过这种变换，这个角是改变了。

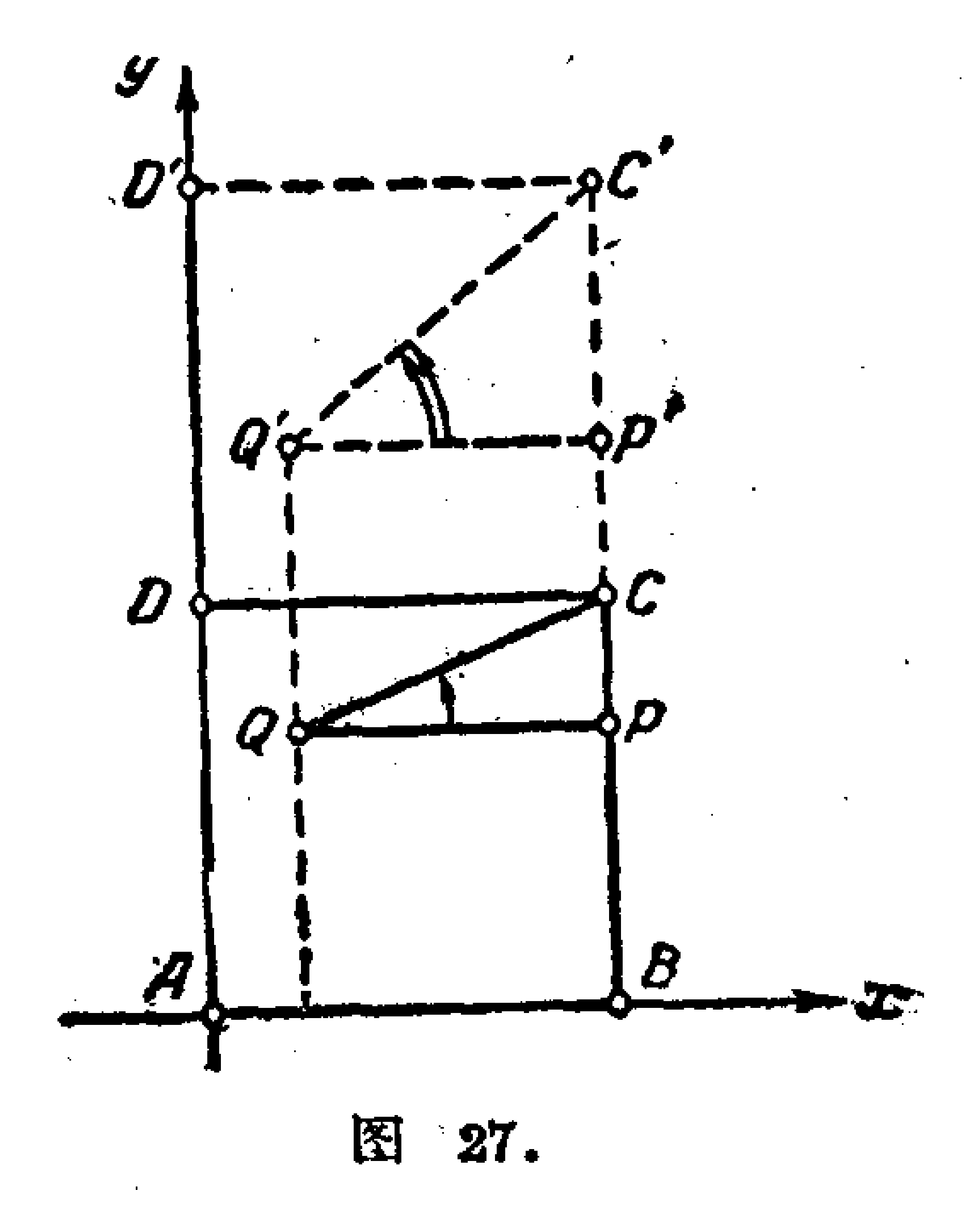


图 27.

从这里可以得出以下的結論：虽然四边形 $ABCD$ 本身的四个角經过这种变换后沒有改变(它們仍保持直角)，但是这种变换并不是保角变换，因为在 $ABCD$ 里面任何一点上作以

这个点为頂的角，这些角在变换后是改变(增大)了。

23. 为了往下討論，我們首先需要使讀者明了，兩条曲綫 QR 和 QP 相交于点 Q 时（图 28），对这兩条曲綫的夾角应該怎样来了解。

在曲綫 QP 上取点 Q 以外的任意一点 Q_1，引弦 QQ_1。同样地，在曲綫 QR 上取点 Q 以外的任意一点 Q_2，引弦 QQ_2。角 Q_1QQ_2 的值可以看作是曲綫角 PQR 的值的漸近值。当点 Q_1 和 Q_2 越接近点 Q 时，弦就越湊近曲綫 QP 和 QR 在点 Q 附近的一段。因此角 Q_1QQ_2 可以看作是跟这兩条曲綫間夾角的值越来越接近的漸近值。如果点 Q_1 沿曲綫 QP 移动，点 Q_2 沿曲綫 QR 移动，并且都无限接近点 Q，那末弦 QQ_1 和 QQ_2 就会繞着点 Q 轉动，逐漸趋近极限位置 QT_1 和 QT_2。射綫 QT_1 和 QT_2，比从点 Q 所作的其他射綫，更湊近在点 Q 附近的兩条曲綫。这兩条直綫叫做**曲綫** QP 和 QR **的切綫**，它們的夾角 T_1QT_2 就是曲綫 QP 和 QR 在 Q 点的夾角。因此，**兩曲綫相交于某一点，所謂兩曲綫的夾角，就是在交点作出的兩曲綫的切綫的夾角**。

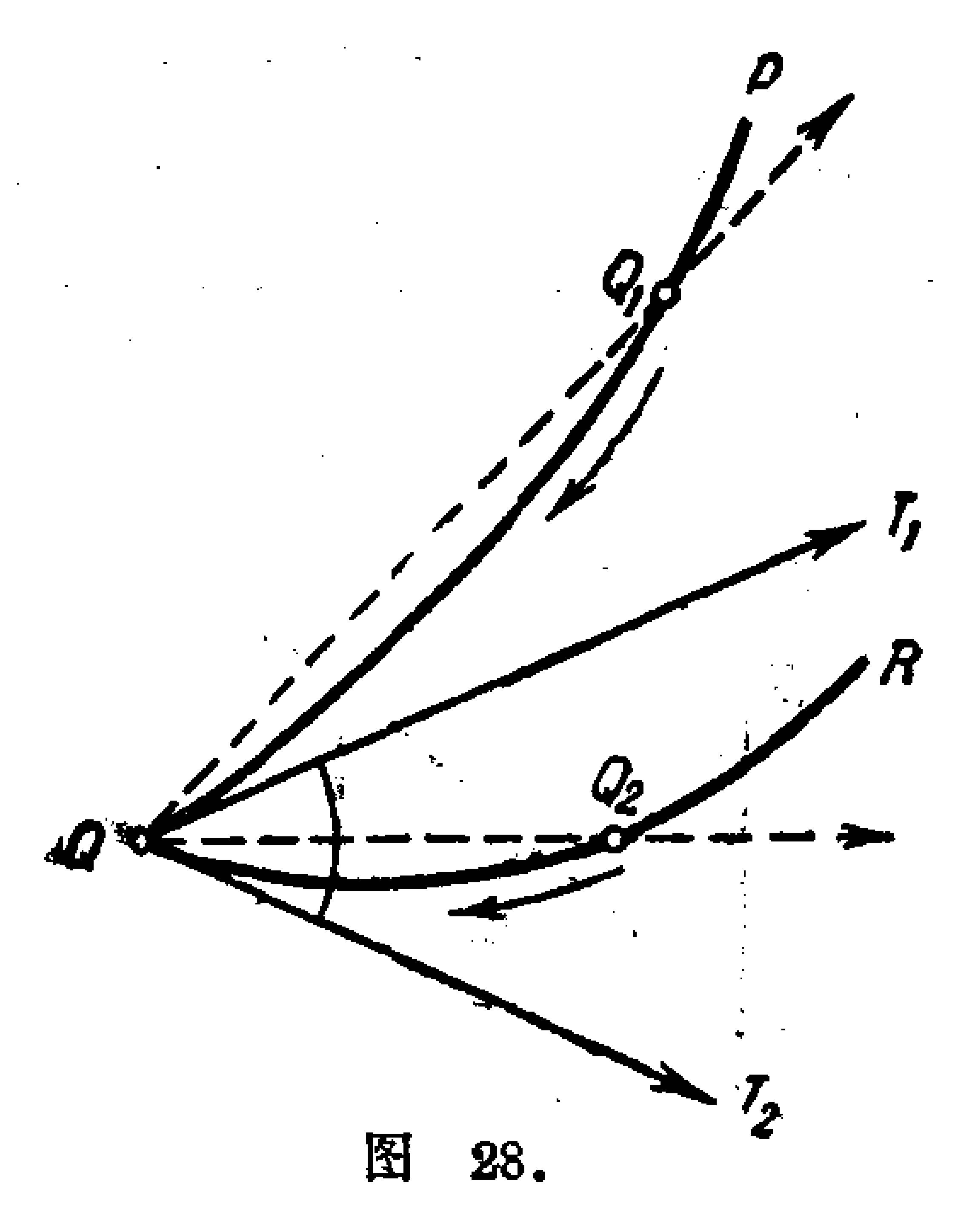


图 28.

这个定义也可以应用于一条曲綫 QP 和一条直綫 QR 相交于一点 Q 所形成的角（图 29）。設 QT_1 是 QP 在点 Q 的切

綫．为了引用定义，应該把直綫 QR 换成这直綫的切綫．但是很容易知道，直綫 QR 的切綫就是直綫本身．事实上，为了引一弦，应該在 QR 上取点 Q 以外的任意一点 Q_1，然后联起 Q 和 Q_1．显然，这条联綫仍旧是 QR．如果 Q_1 逐漸接近 Q，上述的弦却保持不变．因为切綫是弦的极限位置，所以切綫仍然是直綫 QR．因此，应該把曲綫 QP 和直綫 QR 間的夾角了解作曲綫 QP 在 Q 点的切綫 QT_1 和原直綫 QR 間的夾角．可能有这样的情形，直綫 QR 就是曲綫 QP 的切綫（也就是 QR 和 QT_1 重合）；这时候 QR 和 QP 的夾角就变成了零．于是，曲綫和从点 Q 所作的切綫間的夾角等于零．

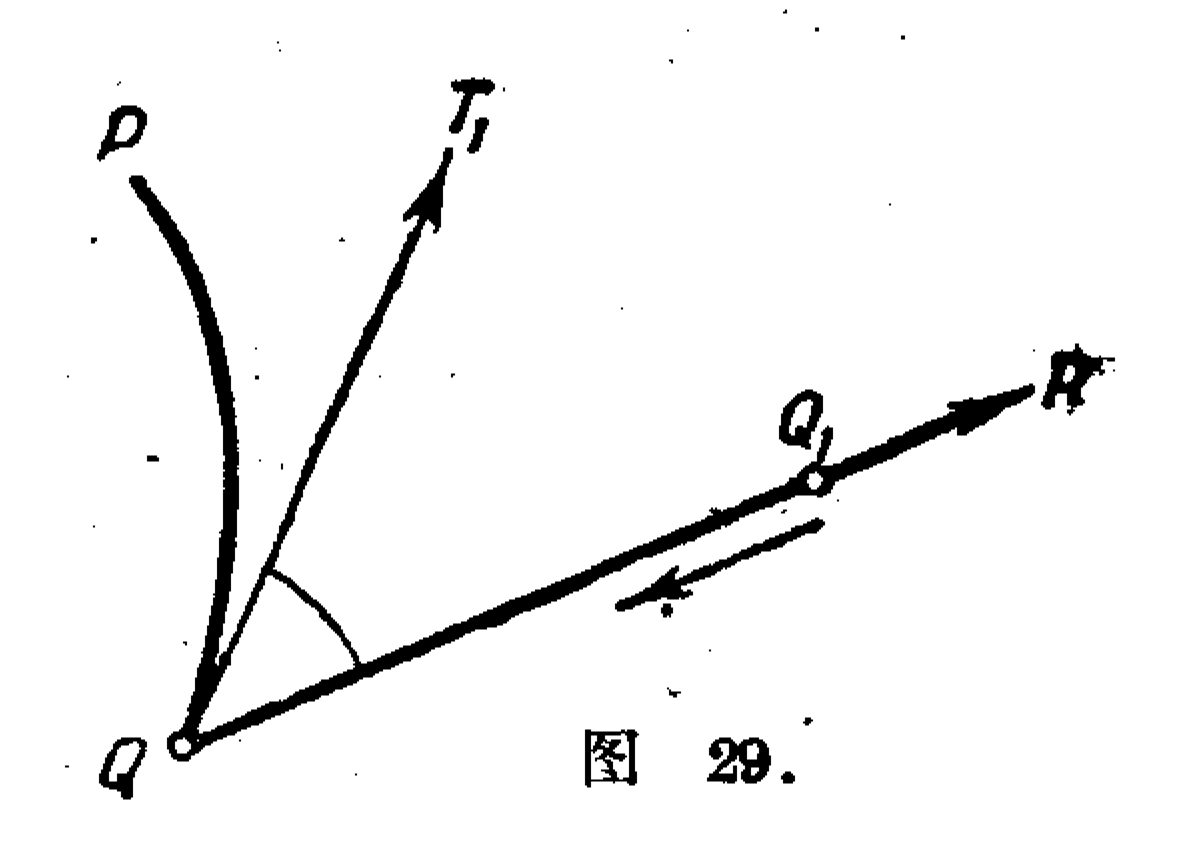


图 29.

24．保角映象有很多用处．例如，在地图的制图学中就要用到它．

每一幅地图，都是把地球表面的一部分描繪到平面上（一張紙上）。描繪时，大陆和海洋的輪廓多多少少要受到歪曲．讀者容易相信，如果不允許有伸長和縮短、不允許有破裂和褶紋，那末就不可能把一块块的球面（例如乒乓球的破壳）压放在一个平面上．由于同样的緣故，不允許改变比例因而也不允許改变形狀，就不可能把地球表面（以后可以把它看作球面）描繪在平面上，这也就是說，不可能制成地图．但是，可以这样来制地图，就是使地球表面上的任何兩直綫間的夾角大小不变．

假使要制一幅北半球的地图，在这幅地图上，地球表面任何兩方向間的夾角大小都要画得和原来一样。为了表現得显明，我們可以这样作：設想地球是任何透明材料，比如說是玻璃形成的，除了北半球的大陆的周界、国家和海洋的周界以及經緯綫以外，其他地方都涂上一层不透明的顏料。此外，可以把以北半球上任何一点作頂的任意角 PQR 的边（曲綫）保留，不涂不透明的顏料。如果在地球的南极放一个又小又亮的电灯，而在地球的前面和地軸垂直的方向放一幅銀幕，那末在一間黑屋子里，我們就可以在銀幕上看到北半球的地界图（图 30）。可以用几何方法証明，在这样的地图（叫作极射赤面投影图）上，北半球上任何兩条綫間的夾角大小都表示得和原来一样。特別是角 PQR 表示得也和原来一样大。

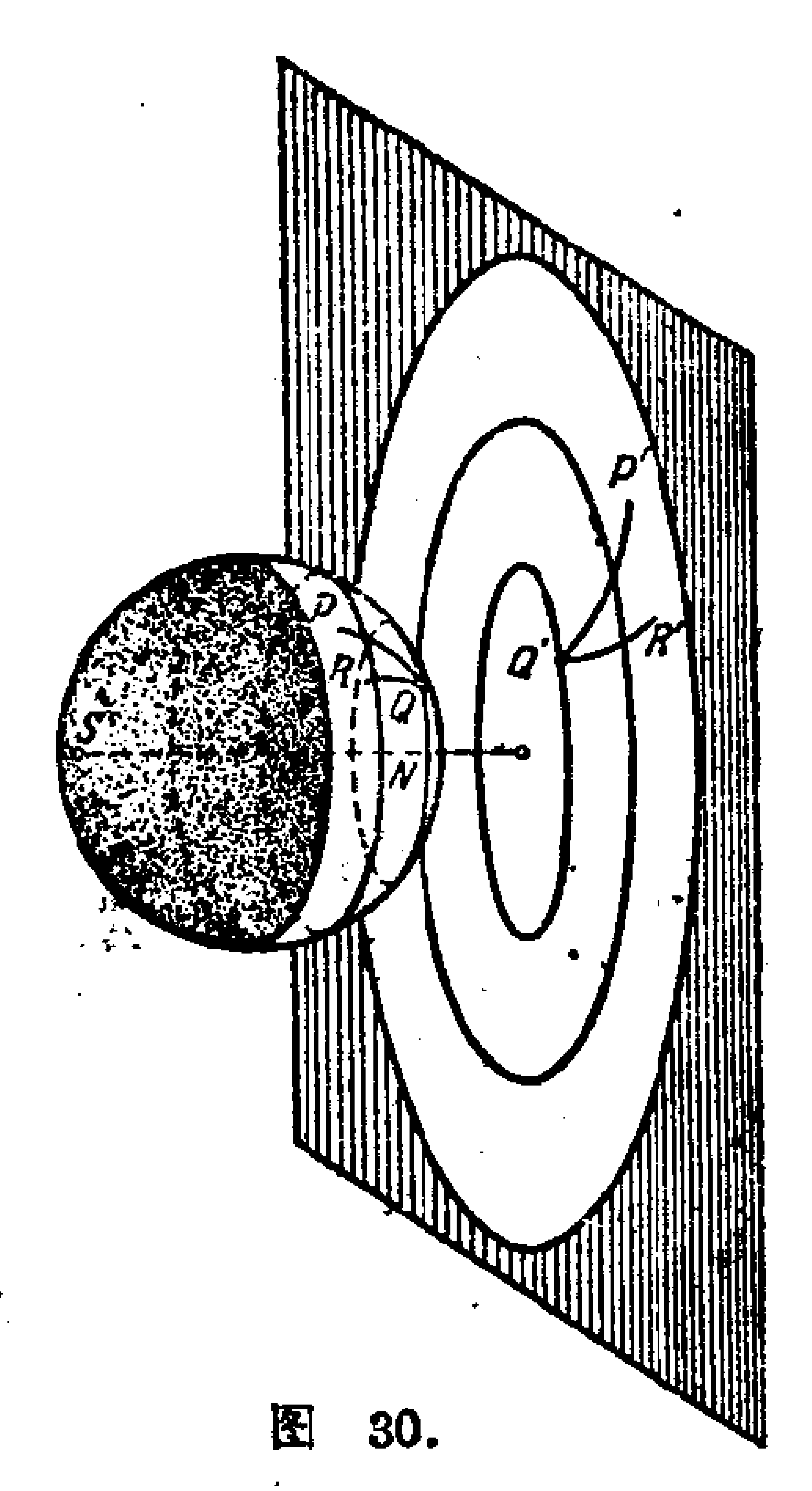


图 30.

25. 上面我們敍述了怎样才可以画成一幅所有的角都保持原来数值的北半球地图。如果不把发射光綫的光源（电灯）放在南极，而放在北极，那末就可以用同样的方法得到南半球的地图，并且使南半球上所有的角都保持原来的数值。用上述方法得到的每一幅地图，都是平面图；如果再把这平面图作一次保角映象，它就变換成一幅新的图，这幅新图仍旧可以看

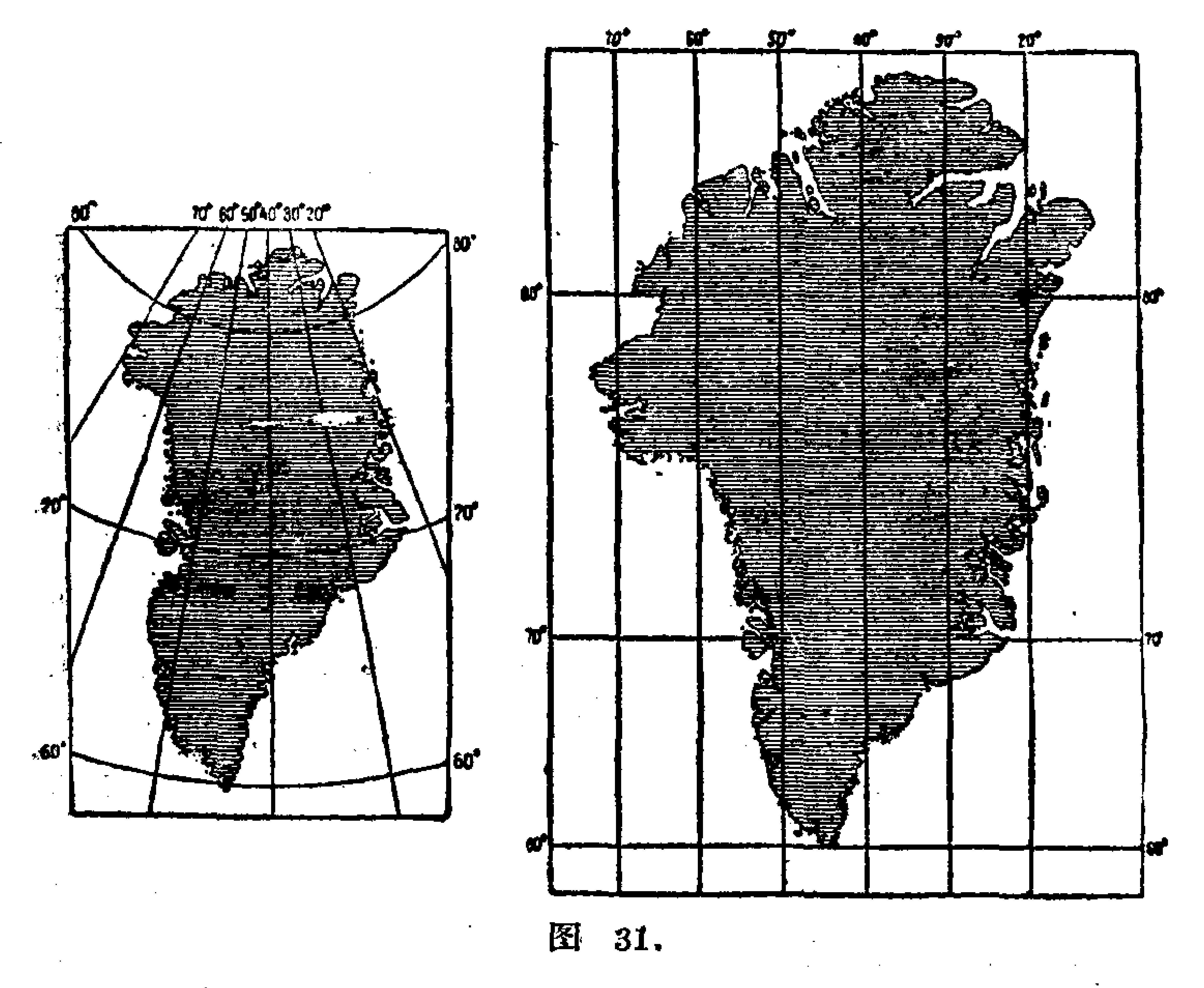


图 31.

作是一幅地图。因为經过保角映象后角是不变的，所以在新的地图上地球表面任何两方向間的夾角仍保持原来数值。图31左边的地图是格林蘭的极射赤面投影图，右边的是把左边图上每一个点經过下列变换公式而得到的：

$$z' = \log_e |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

这里作对数的底数的就是所謂納氏数 $e = 2.71828\cdots\cdots$，而 $\operatorname{Arg} z$ 不是用度数来計算而是用弧度来計算的。

毫无疑問，这个公式，一看就知道是很复杂的、特地造作的。在这里我們不可能詳細地去研究它，也不可能去驗証出这个公式产生的变换的确是保角变换。我們只能說出，用这样的公式来繪制成地图，大約是四百年前荷蘭学者麦卡托首

創的。直到現在，这种地图在航海中仍旧广泛地流行着。这种地图比极射赤面投影图好的地方就在：图上不但經綫是直綫，而且緯綫也是直綫；还有，地球表面上的任何路綫，凡是順着走时罗盤指針方向保持不变的路綫（所謂斜航綫），在图上也被画成了直綫。

26. 保角映象最重要的应用，是在物理学和力学問題方面。在許多問題里，例如討論到一个帶电的电容器周圍空間中一点的电位，或者討論到一个加热物体周圍的溫度，討論到液体或气体在某一个渠道內繞流过一个障碍物时液流或气流里微粒的速度，都需要会計算电位、溫度和速度等等。如果碰到問題里的物体形狀特別簡單（例如成平板狀或圓柱狀），解答这类問題就沒有多大困难。但是还有很多其他情況，也需要会做这种計算。例如，在制造飞机的时候，必須会計算机翼周圍气流里空气微粒的速度①。

机翼的横断面（翼型）如图 32*a* 所示。其实，当被繞流过

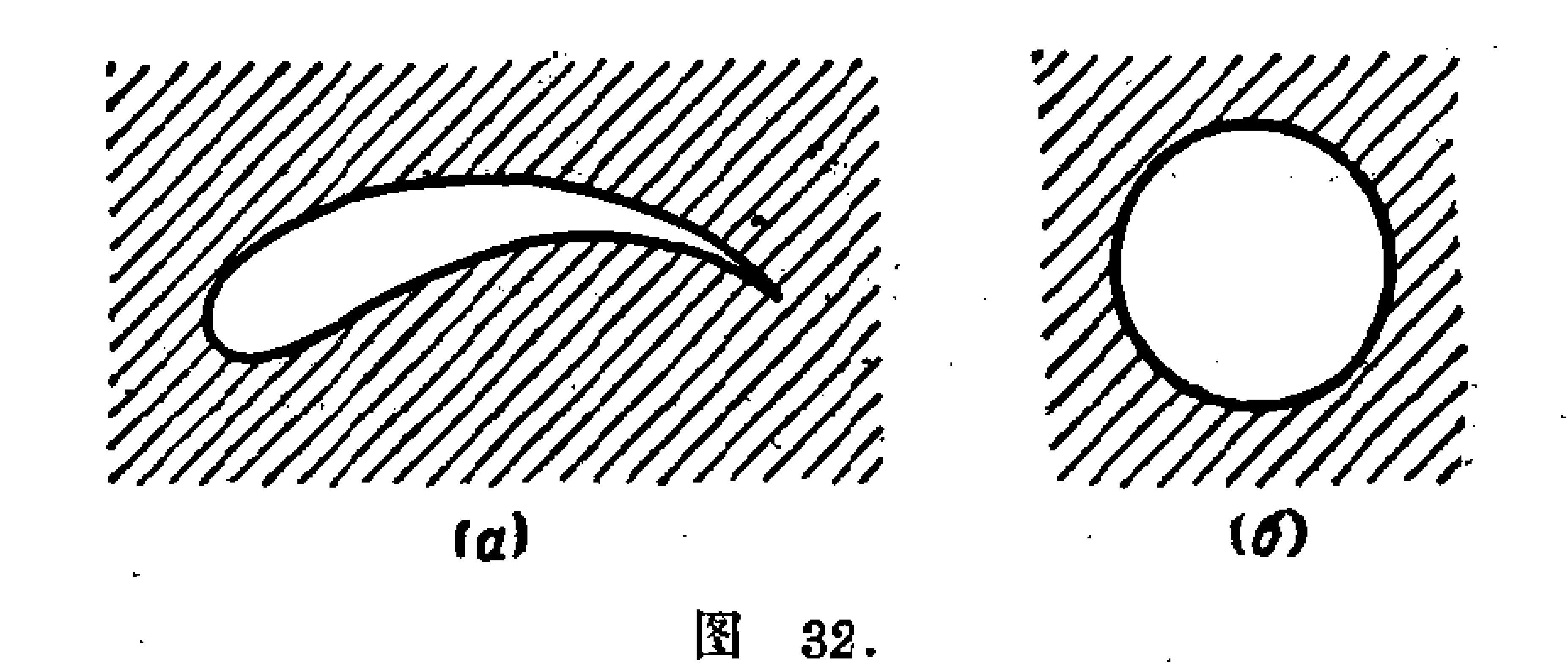


图 32.

① 飞机飞行时，空气微粒和机翼当然都在运动。但是，根据力学的定律，可以作为这样的情形来研究：假設机翼不动，空气却在机翼周圍繞流而过。

的物体的横断面图是一个圆时(就是説,物体本身是一个圆柱时)(图 32б),計算速度就特別簡單.

由此可見,为了把繞流过机翼的空气流的速度問題变换成簡單的繞流过圆柱的問題,只要用保角映象把图 32a 的图形(翼型的外周)变换到图 32б 的图形(圓的外周)就行了.这种样子的映象,可以用一定的复变函数来实現.知道了这个函数,就可以把繞流过圓柱的气流的速度换算到繞流过机翼的气流的速度,因此,提出来的問題就完全解决了.

同样地,用保角映象可以把任何形狀(任何横断面)的物体的研究里有关計算电位和溫度的問題变换成最簡單的情形来解决.然后用那个实現保角映象的复变函数,把結果反过来轉算到原来的帶电(或帶热)的物体的周圍空間去.

27. 上面講到的关于保角映象在制图、力学和物理学問題上的应用,我們沒有作出証明.在这本書里,我們不可能作証明,因为要了解它們,讀者就必須具有在高等学校里才能講授的知識.

从这里直到本書的末了,我們要討論最簡單的有理函数,用这些函数可以实現某一些保角映象.我們要談到的函数就是:(1) $z'=\frac{z-a}{z-b}$(所謂綫性分式函数);(2) $z'=z^2$;(3) $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.最后一个函数是以著名的俄罗斯学者尼古拉·叶果罗維奇·儒科夫斯基(1847–1921)来命名的,列宁很公正地把他称为"俄罗斯航空之父".这个函数叫做儒科夫斯基函数,因为儒科夫斯基很成功地应用它来解决了一些飞机的理論問題;特別是他說明了,利用这个函数可以得到某些具有理



尼古拉·叶果罗維奇·儒科夫斯基

(1847-1921)

他在飞机的計算里，广泛地应用了复数和保角映象

論和实用价值的飞机翼型图。

关于这个儒科夫斯基函数的应用，我們下面还要講到。

28．先从綫性分式函数 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 講起。在这里，a 和 b 是兩个不相等的复数。我們来証明：用这个函数，可以把每一个經过点 a 和 b 的圓弧 PLQ 变换到由坐标原点发射出来的某一射綫 $P'L'$，并且这一射綫和正实軸的夾角等于方向 baN 和圓弧在点 a 的切綫的夾角(图 33)。

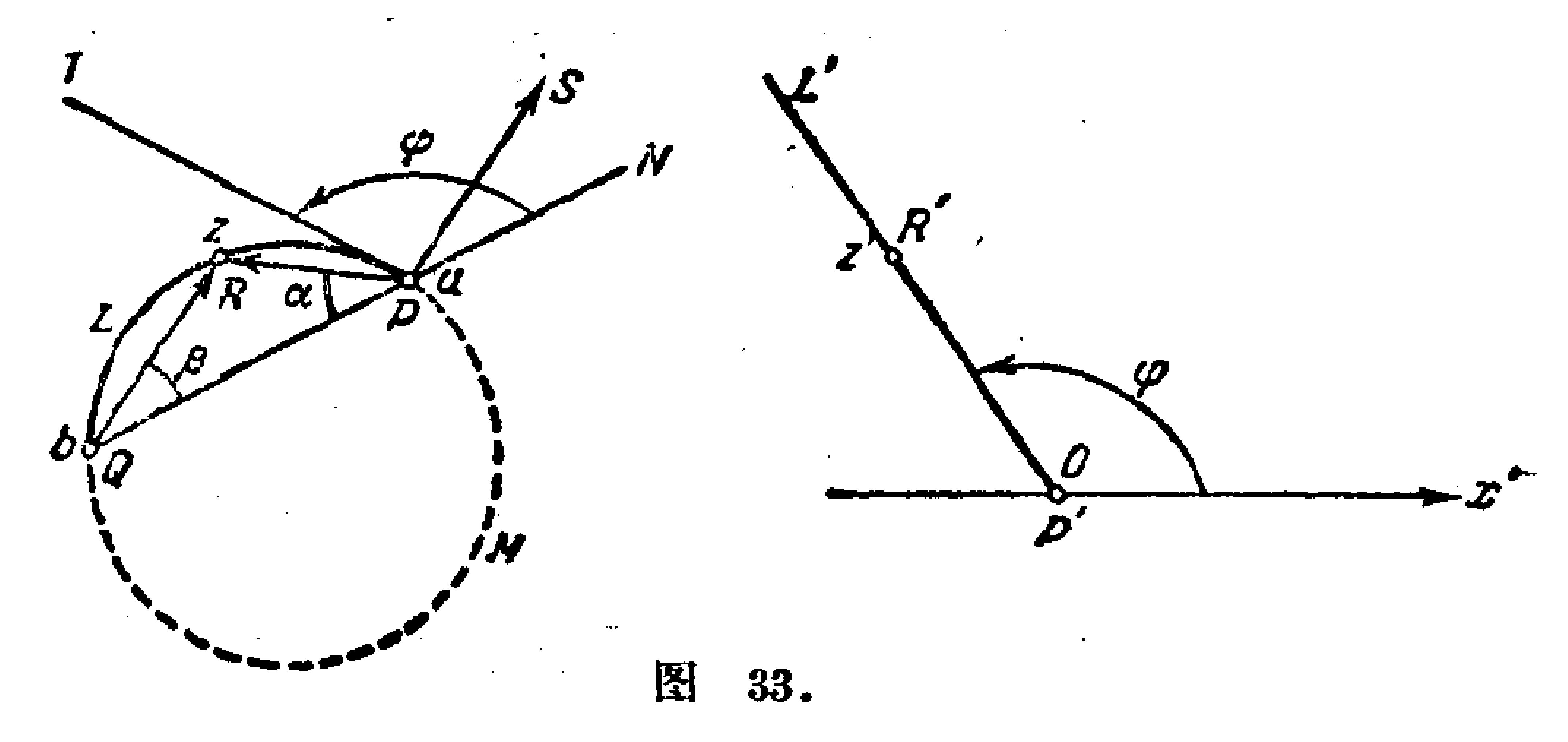


图 33.

設点 z 在弧 PLQ 上(图 33 左方)，讓我們証明，它的象(也就是和它对应的点 $z'=\frac{z-a}{z-b}$)一定在射綫 $P'L'$ 上(图33右方)。要作出向量 z'，必須知道这个向量的長($|z'|$)和这个向量对正实軸的傾斜角 ($\operatorname{Arg} z'$)。但是，z' 是兩个复数 $z-a$ 和 $z-b$ 的商，而表示 $z-a$ 和 $z-b$ 的是向量 PR 和 QR。于是 $|z'|=\frac{|z-a|}{|z-b|}$，而 $\operatorname{Arg} z'$ 等于角 SPR (向量 PS 和向量 QR 等長而且方向相同，計算方向是从 PS 到 PR。显然，$\widehat{SPR}=\widehat{QRP}$①，因而它等于圓弧 QMP 的一半。而角 NPT 也等于圓弧 QMP 的

① 記号 $\widehat{ABC}$ 表示角 ABC。

一半。于是 $\operatorname{Arg} z'=\widehat{SPR}=\widehat{QRP}=\widehat{NPT}=\varphi$。由此可知，在圓弧 PLQ 上任何地方的点 z，它的象点 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 都具有相同的幅角 φ。这就是說，圓弧上所有的点的象都在和正实軸成傾斜角 φ 的一条射綫 $P'L'$ 上。

如果 PLQ 不是一个圓弧、而是一段直綫 PQ，这个結論仍然是对的。这时候，应該把角 φ 看成等于 $180°$，射綫 $P'L'$ 和負实軸相重合(图 34)。事实上，如果 z 是綫段 QP 上的一点，那末表示 $z-a$ 和 $z-b$ 的两个向量的方向剛巧是相反的。因此知道，商 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 是負的实数，也就是說 z' 在負实軸上。

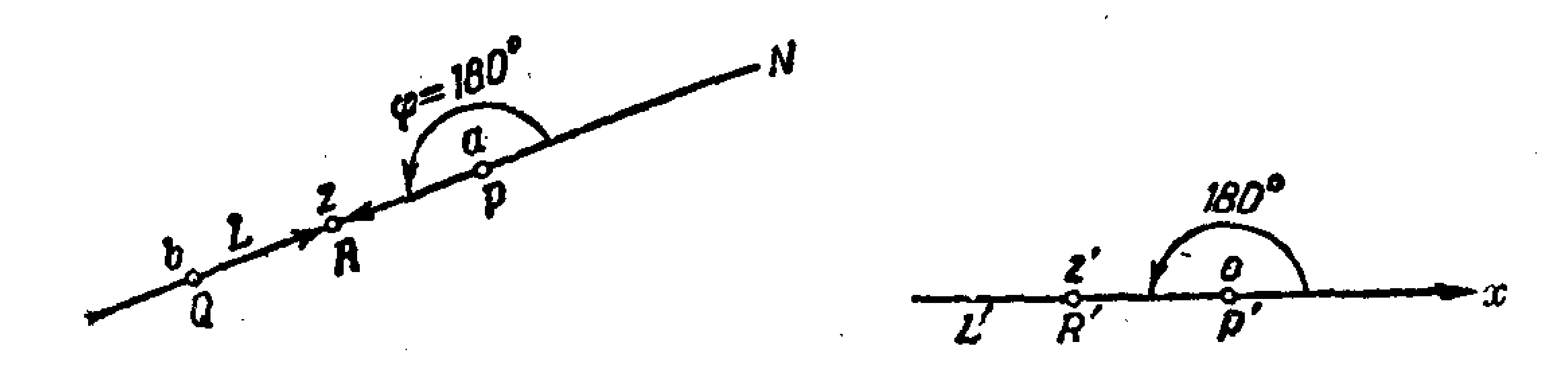


图 34.

我們已經証明了，圓弧 PLQ 的所有的象点都在射綫 $P'L'$ 上。但是，这些象点是占滿整段射綫 $P'L'$ 呢，还是在 $P'L'$ 上有不是圓弧 PLQ 上任何一点的象点呢？現在讓我們来証明：象点是占滿整段射綫的。

先来看看点 P'(原点)；这个点是点 P 的象点，因为当 $z=a$ 时，$z'=\frac{z-a}{z-b}$ 变成零。在射綫 $P'L'$ 上任取一点 z' (图 35)，但不取 P'(也就是 $z'\neq 0$)。显然 z' 不可能是正的实数，因为射綫 $P'L'$ 不和正实軸重合。

把 z 看作未知数，从方程 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 求解 z；便有 $z'z-z'b=$

$z-a$，由此得 $z=\frac{z'b-a}{z'-1}$。所以对于 $P'L'$ 上的每一个点 z'，可以找到唯一的一个值 z，使 $z'=\frac{z-a}{z-b}$，这也就是說 z' 是 z 的象点。但是点 z 的位置在哪里呢？是不是可能 z 不在弧 PLQ 上？我們說，这是不可能的。首先，点 z 不可能在綫段 PQ 的延綫上（就是在綫段 PQ 以外）。否則复数 $z-a$ 和 $z-b$ 就会有相等的幅角，$z'=\frac{z-a}{z-b}$ 就会是一个正数。現在假設 z 不在 PQ 的延綫上，經过 P 和 Q 作一个圓弧，并且使圓弧經过 z（要是 z 在綫段 PQ 上，那就不用作圓弧而应該取綫段 PQ）。設所作的圓弧是 PL_1Q；因为它和 PLQ 不重合，所以这个圓弧在 P 点的切綫將和方向 baN 形成夾角 φ_1，不等于 φ（图 35）。因此点

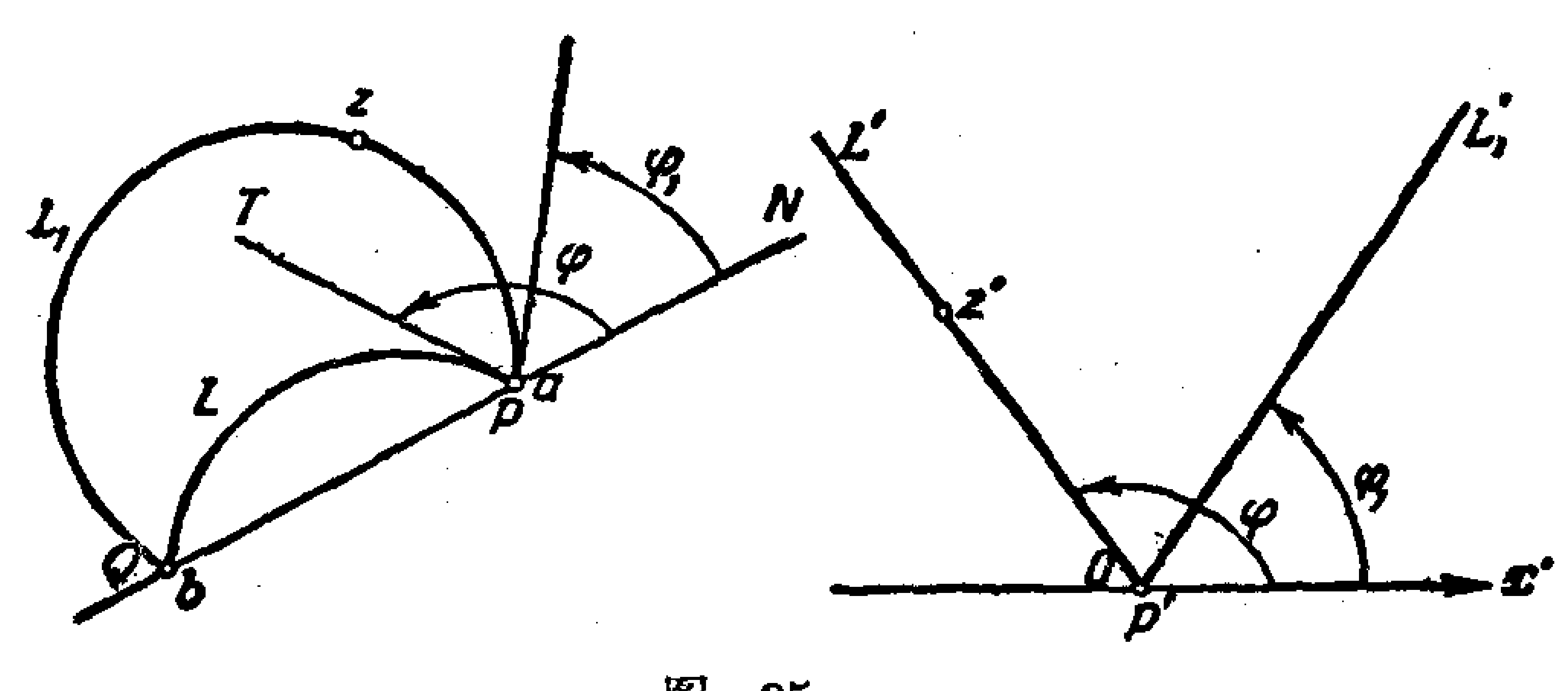


图 35.

z 的函数 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 的值一定可以用射綫 $P'L_1'$ 上的点来表示，射綫 $P'L_1'$ 和正实軸成傾斜角 φ_1，因此知道 $P'L_1'$ 不和 $P'L'$ 重合。我們发現了一个矛盾，因为得到的結論是：除点 P' 以外的点 z' 一定在射綫 $P'L'$ 上，也在 $P'L_1'$ 上。所以我們証明了，在 $P'L'$ 上的每一个点 z' 只是一个点 z 的象（$z'=\frac{z-a}{z-b}$），而且 z 在弧 PLQ 上。由此可知，如果点 z' 跑过了射綫 $P'L'$，那末从公式 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 决定的和 z' 对应的点 z 就要跑过 PLQ。

最后讓我們証明：当点 z 順着 P 到 Q 的方向画出圓弧 PLQ 时，象点 z' 就会順着从点 P' 远去的一个方向画出射綫 $P'L'$。为了达到这个目的，只須証明：当点 z 作上面規定的运动时，距离 $P'R'=|z'|=\frac{|z-a|}{|z-b|}=\frac{PR}{QR}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$（图 33）逐漸增大而趋向无穷。但知 $\varphi+\alpha+\beta=180°$，因而 $\beta=180°-(\alpha+\varphi)$，$\sin\beta=\sin(\alpha+\varphi)=\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi$，于是

$$P'R'=|z'|=\frac{\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi}{\sin\alpha}=\cos\varphi+\sin\varphi\operatorname{ctg}\alpha.$$

当点 z 順着弧 PLQ 从 P 向 Q 运动时，角 α 的值从 $180°-\varphi$ 逐漸減小到零，而角 φ 的值不变。因此，$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值是从 $-\operatorname{ctg}\varphi$ 的值增加到 $+\infty$，$|z'|=\cos\varphi+\operatorname{ctg}\alpha\sin\varphi$ 也一样会增加（因为 $\sin\varphi$ 的值是正的），并且从 $\cos\varphi-\operatorname{ctg}\varphi\sin\varphi=0$ 增加到 $+\infty$。

29. 我們来研究一个任意圓 PLM，它經过点 a 而不經过点 b（图 36）。設圓在点 a 的切綫和 baN 方向形成的角等于 φ。作一个經过点 a 和点 b 的輔助圓，使这个圓在点 a 的切綫和 baN 方向成 $\varphi+90°$ 角。这个輔助圓和原来的圓相交于某一点 E；把这个点所表示的复数記作 c。我們来証明，函数 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 把圓 PLM 变成一个以綫段 $P'E'$ 作直徑的圓 $P'L'M'$，点 P' 表示的是复数 0，点 E' 表示的是复数 $c'=\frac{c-a}{c-b}$（图 36）。因此，圓 $P'L'M'$ 在点 P' 的切綫和实軸正方向的交角是 φ。

因此，我們打算証明，PLM 上每一点 z 的对应点 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 必定在圓 $P'L'M'$ 上，并且点 0 和 $c'=\frac{c-a}{c-b}$ 是圓 $P'L'M'$ 的一直徑的兩端点。显然，只要証明，从每一点 $z'=\frac{z-a}{z-b}$（設 z 在 PLM 上）来看綫段 $P'E'$，所張的視角都是直角，也就是說，角

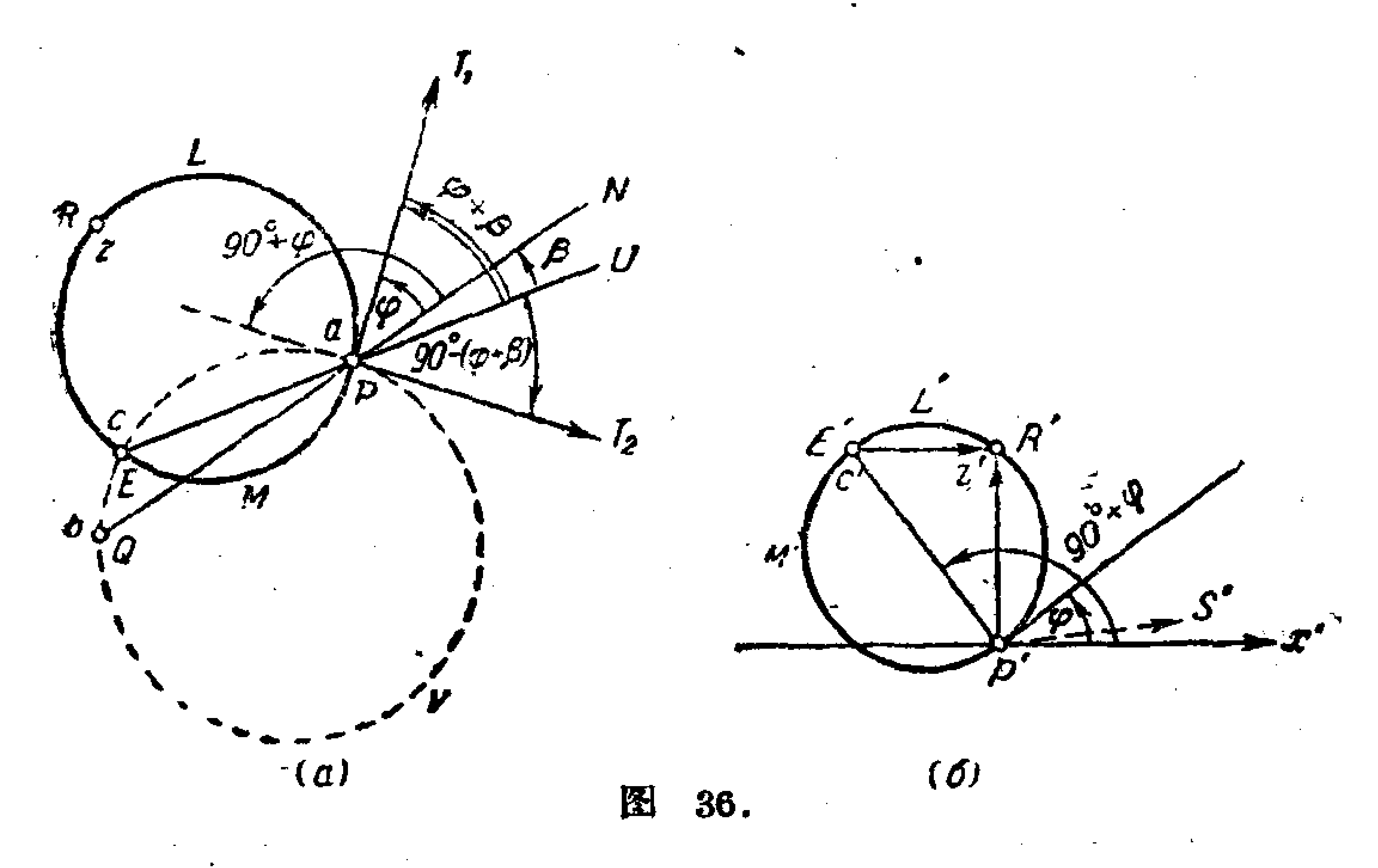


图 36.

$E'R'P'$ 等于直角①。但是，角 $E'R'P'$ 是表示复数 $z'-c'$ 的向量 $E'R'$ 和表示复数 z' 的向量 $P'R'$ 形成的；这个角度等于角 $S'P'R'$（向量 $P'S'$ 和向量 $E'R'$ 方向相同，長度相等），角 $S'P'R'$ 的方向是从 $P'S'$ 到 $P'R'$ 的。角 $S'P'R'$ 等于 $\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$，因此，我們感兴趣的角 $P'R'E'$ 也等于复数 $\frac{z'}{z'-c'}$ 的幅角，也就是說，$\angle P'R'E'=\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$。变换式子 $\frac{z'}{z'-c'}$，用 $\frac{z-a}{z-b}$ 来代替 z'，用 $\frac{c-a}{c-b}$ 来代替 c'。得到：

$$\frac{z'}{z'-c'}=\frac{z-a}{z-b}\div\left(\frac{z-a}{z-b}-\frac{c-a}{c-b}\right)=\frac{z-a}{z-b}\div\frac{(z-c)(a-b)}{(z-b)(c-b)}$$
$$=\frac{z-a}{z-c}\div\frac{b-a}{b-c}=\frac{z''}{b''}.$$

在这里，$\frac{z-a}{z-c}=z''$，$\frac{b-a}{b-c}=b''$。显然，z'' 也是 z 的綫性分式函

① 因为，从平面上某一点来看一个綫段，如果所張的視角是直角，那末这一点必在以該綫段作直徑的圓上。

数。这个函数 $z''=\frac{z-a}{z-c}$ 和我們原来的函数 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 的差别，只是把点 c 换成了点 b。对于这个新函数，可以应用第 28 节已經获得的結果。这就是說，如果点 z 在联結 a 和 c 的圓弧上，那末点 z'' 就一定在从坐标原点出发的射綫上。这时候，如果圓弧在 a 点的切綫和 caU 方向相交成某一角 α，那末对应的射綫和实軸正方向也相交成角 α；换句話說，就是 z'' 的幅角等于 α。因为点 z 在經过点 a 和 c 的圓弧 PLE 上，这个圓弧的切綫 PT_1 和 caU 方向的交角等于 $\beta+\varphi$（图 36a），所以无論 z 在弧 PLE 的什么地方，复数 $z''=\frac{z-a}{z-c}$ 的幅角都应該等于 $\beta+\varphi$。另一方面，点 b 在联結点 a 和 c 的圓弧 PVE 上。这个圓弧在点 a 的切綫 PT_2 和 caU 方向的交角是 $(\beta+\varphi)-90°$（这个角的絕对值等于 $90°-(\beta+\varphi)$，但是从图 36a 可以看出，在我們考慮的情形，这个角的轉动方向是負的，因此应該加上負号）。因此，綫性分式函数 $\frac{z-a}{z-c}$ 在 $z=b$ 时的值，也就是复数 $b''=\frac{b-a}{b-c}$，应該用射綫上某一点来表示，这条射綫从坐标原点射出，和实軸正方向的交角是 $(\beta+\varphi)-90°$，也就是說，$\operatorname{Arg} b''=(\beta+\varphi)-90°$。

回想一下，我們要求出的角是：

$$\widehat{P'R'E'}=\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}.$$

我們已經求出，$\frac{z'}{z'-c'}=\frac{z''}{b''}$，并且

$$\operatorname{Arg} z''=\beta+\varphi,\ \operatorname{Arg} b''=(\beta+\varphi)-90°;$$

从这里可以推出，$\operatorname{Arg}\frac{z''}{b''}=90°$（图37），以及

$$\widehat{P'R'E'}=\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}=\operatorname{Arg}\frac{z''}{b''}=90°.$$

因此，从每一个点 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 来看綫段 $P'E'$，所張的視角都是直角。这就説明了，点 z' 在以綫段 $P'E'$ 作直徑的圓 $P'L'M'$ 上①。

还必須説明，这个圓在 P' 点的切綫和实軸正方向相交成角 φ。为了説明这一点，只要証明，直徑 $P'E'$ 和实軸正方向的交角等于 $\varphi+90°$。后一个角等于 $\operatorname{Arg} c'=\operatorname{Arg}\frac{c-a}{c-b}$。但是点 c 在联結点 a 和 b 的圓弧 PEQ 上。因为这个弧在点 a 的切綫和 baN 方向成角 $90°+\varphi$，所以点 $c'=\frac{c-a}{c-b}$ 应該在和实軸正方向成交角 $90°+\varphi$ 的射綫上，就是 $\operatorname{Arg} c'=90°+\varphi$，这正是需要証明的。

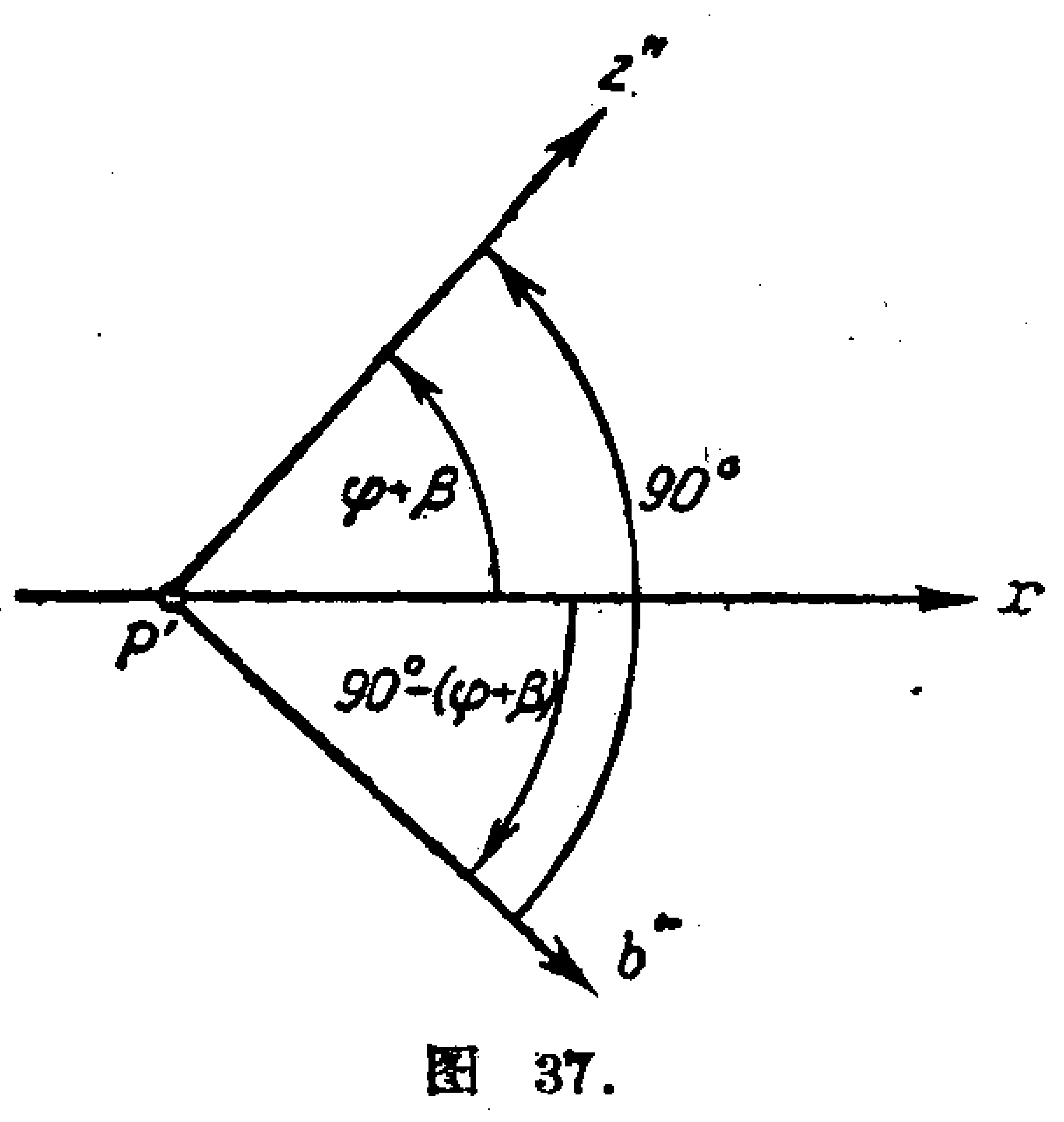


图 37.

30. 作为一个例子，我們来説明图 38 左方阴影綫部分，用函数 $z'=\frac{z-1}{z+1}$ 作映象以后，將变成什么样子。这个函数具有形式 $\frac{z-a}{z-b}$，这里 $a=1, b=-1$。因为弧 PLQ 經过点 1 和 -1，并且在点 $a=1$ 和方向 QPN 相交成角 φ，所以根据第 28

① 在証明时，我們取在弧 PLE 上的点 z；这时对应点 z' 落在半圓 $P'L'E'$ 上。如果取在弧 EMP 上的点 z，証明并沒有改变；只是要注意，这个圓弧在 a 点的切綫方向和 PT_1 相反。这就是表示，$\operatorname{Arg} z''$ 不等于 $\beta+\varphi$ 而等于 $\beta+\varphi-180°$。因此，得到 $\widehat{P'R'E'}=\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$ 的值是 $(\beta+\varphi-180°)-(\beta+\varphi-90°)=-90°$。这相当于点 z' 在半圓 $E'M'P'$ 上。

节的結果，这个弧將变換到从坐标原点开始并和实軸正方向相交成角φ的射綫．弧PMQ也是联結 1 和 -1 兩点的圓弧，不过它在点 $a=1$ 和 QPN 方向的交角是 $\varphi-180^\circ$（这个角的絕对值等于 $180^\circ-\varphi$；但我們知道这个角是按順时針方向轉动的，这就是說，它的方向是負的）．因此，函数 $z'=\frac{z-1}{z+1}$ 把弧 PMQ 变換到从原点开始并和实軸正方向相交成角 $\varphi-180^\circ$ 的射綫 $P'M'$．显然，射綫 $P'L'$ 和 $P'M'$ 合成一条直綫；因此，函数 $z'=\frac{z-1}{z+1}$ 把整个圓周 $PLQM$（由弧 PLQ 和弧 PMQ 組成）变換到整条直綫 $M'P'L'$．

通过点 P 和 Q 作一輔助圓弧，使这个圓在点 P 的切綫和 QPN 方向成角 $\varphi+90^\circ$．这个圓弧和圓周 PRS 相交于点 E．根据第 28 节的結果，弧 PEQ 被函数 $z'=\frac{z-1}{z+1}$ 变換到从点 P' 出发并和实軸正方向成交角 $\varphi+90^\circ$ 的射綫．这样，点 E 就变換到这条射綫上的一点 E'．根据第 29 节，圓周 $PRES$ 用函数 $z'=\frac{z-1}{z+1}$ 变換到以綫段 $P'E'$ 作直徑的圓周 $P'R'E'S'$．

于是，結果圓周 $PLQM$ 变換到直綫 $M'P'L'$，而內切于前

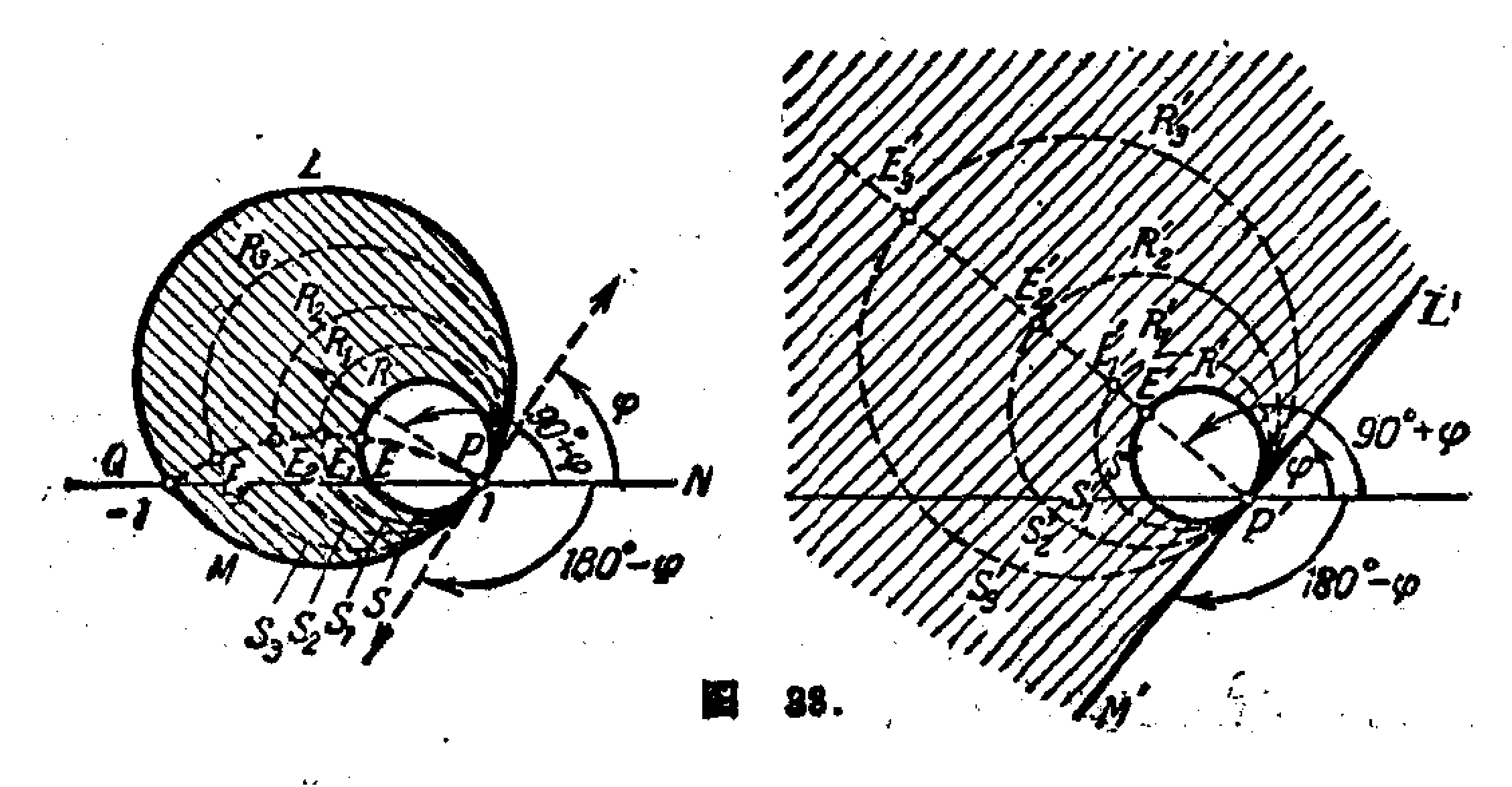


圖 33.

一个圓周的圓周 $PRES$ 变換到和直綫 $M'P'L'$ 相切于点 P' 的圓周 $P'R'E'S'$. 是不是可以認为，把图上阴影部分用函数 $z'=\frac{z-1}{z+1}$ 来变換的問題已經完全解决了呢？不，問題还沒有徹底解决：我們已經解决的只是这部分的边界的变換，还需要知道在圓 $PRES$ 和 $PLQM$ 內部各点的变換情形。

为了搞清楚这方面的情况，我們得注意，图上阴影部分可以用和 $PLQM$ 相切于点 P 并处在 $PRES$ 和 $PLQM$ 間的圓周来塡滿。这种圓周和弧 PEQ 相交于在点 E 和点 Q 之間的一些点。在图 38 上，用虛綫画出了这种圓組成的无穷圓集合中的三个圓，它們和弧 PEQ 相交于点 E_1、E_2 和 E_3。如果我們知道这些圓用函数 $z'=\frac{z-1}{z+1}$ 变換到什么曲綫，那末我們对于由这些曲綫塡滿而成的图形就可以想象得出。而这也正是原图形經过变換以后所得到的图形。

但是，根据第 29 节的結論，圓周 $PR_1E_1S_1$ 变換到圓周 $P'R_1'E_1'S_1'$，圓周 $PR_2E_2S_2$ 变換到 $P'R_2'E_2'S_2'$，等等。

在第 28 节末尾，我們指出，当点 z 順着弧 PQ 逐渐接近点 Q 时，它的对应点 z' 就順着以 P' 作始点的射綫离开点 P' 越来越远。由此可知，如果点 E_2 比点 E_1 更接近 Q，那末点 E_2 在射綫上的象点 E_2' 比 E_1 的象点 E_1' 离 P' 更远。因此，圓周 $PR_2E_2S_2$ 的象圓 $P'R_2'E_2'S_2'$ 的直徑 $P'E_2'$ 就比圓周 $PR_1E_1S_1$ 的象圓 $P'R_1'E_1'S_1'$ 的直徑 $P'E_1'$ 更長，这在我們的图上就已經表示出来了。如果取圓周 $PR_3E_3S_3$，使它和弧 PEQ 的交点十分接近点 Q，那末我們可以得到，它的象 $P'R_3'E_3'S_3'$ 具有尽可能大的直徑。显然，塡滿图 38 左方阴影图形的圓周

$PR_1E_1S_1$、$PR_2E_2S_2$、$PR_3E_3S_3$ 等的象圓，將塡滿图 38 右方的阴影图形．后者正是原来图形用函数 $z'=\frac{z-1}{z+1}$ 变换以后所得的象．因此，函数 $z'=\frac{z-1}{z+1}$把兩个圓周包圍成的图形(图38左方)变换到以一直綫和一圓周作界綫的图形(图38右方)．

31． 現在我們来討論用函数 $z'=z^2$ 所作的变换．在第26頁的注里，我們已經預示讀者，对于用有理函数所作的变换，保持角度不变的規律可能出現例外．这就是說，以某些例外点作頂的角，經过变换以后，可能变大了若干倍．在現在討論的这个情形，就有这种例外点；它就是原点 A．我們說，所有以 A 作頂的角，用 $z'=z^2$ 变换以后，都变成了原来的兩倍．

取由 A 点出发、和实軸正方向相交成角 φ 的射綫 AM (图

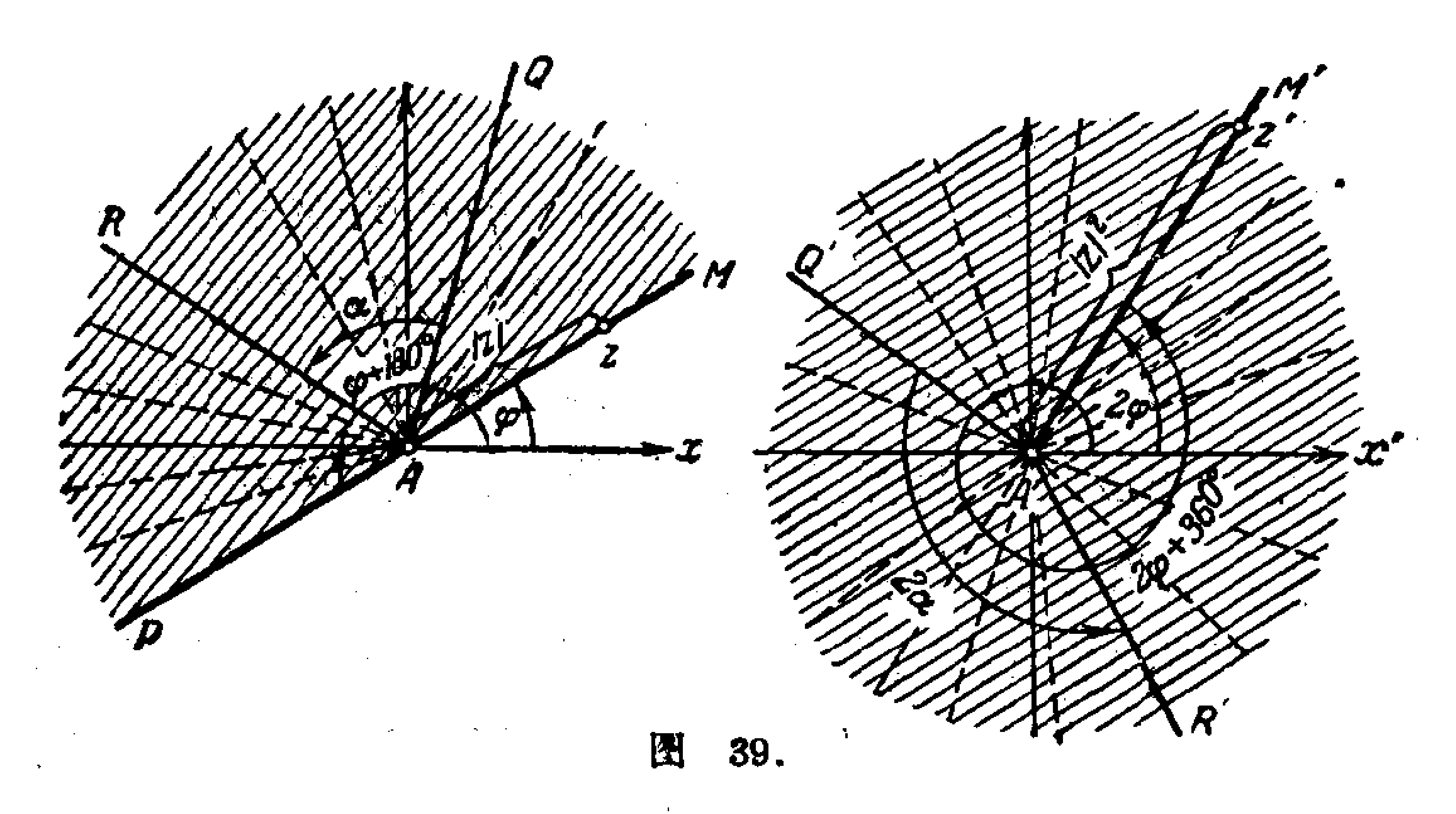


图 39.

39)．对于在这条射綫上的每一点 z，$\operatorname{Arg} z=\varphi$．因为向量 $z'=z^2=z\cdot z$ 是把向量 z 伸長到 $|z|$ 倍幷把幅角 $\operatorname{Arg} z=\varphi$ 扩大到兩倍得到的，所以 $|z'|=|z|\cdot|z|=|z|^2$，而 $\operatorname{Arg} z'=\operatorname{Arg} z+\operatorname{Arg} z=2\varphi$．因此，点 z' 一定在从点 A' 出发幷和实軸正方向相交

成角 2φ 的射綫 $A'M'$ 上。如果点 z 順着 AM 从 A 点无限远离开去，那末对应点 z' 將順着 $A'M'$ 从 A' 点无限远离开去；这时候，点 z' 到点 A' 的距离始終等于点 z 到点 A 距离的平方 ($|z'|=|z|^2$)。

由此可知，函数 $z'=z^2$ 把射綫 AM 变換到射綫 $A'M'$，并且 $A'M'$ 和 $A'x'$ 軸的傾斜角等于 AM 和 Ax 軸的傾斜角的兩倍。

容易想見，和 Ax 軸相交成角 $\varphi+180°$ 的射綫 AP (AM 和 AP 在同一直綫上)，也用函数 $z'=z^2$ 变換成射綫 $A'M'$。事实上，如果把角 $\varphi+180°$ 加倍，就得到 $2\varphi+360°$；和 $A'x'$ 相交成这个角度的射綫和射綫 $A'M'$ 重合。

試看图 39 左方的阴影图形——所謂半平面——用函数 $z'=z^2$ 变換后的图形是什么。半平面可以看作是由 A 点出发、和 Ax 的傾斜角大于 φ 但小于 $\varphi+180°$ 的射綫塡滿而成的图形。射綫 AM 和 AP 組成半平面的边界（一条直綫）；我們不把这兩条射綫算在半平面以內。函数 $z'=z^2$ 把半平面內的所有射綫变換成从 A' 出发并和 $A'x'$ 的傾斜角大于 2φ 但小于 $2\varphi+360°$ 的所有射綫。

由此可知，以射綫 AM 和 AP 作边界的半平面，变換成以單独一条射綫 $A'M'$ 作边界的图形（見图 39 右方）。变換成的图形可以看作一个平面，但是它不包括射綫 $A'M'$。既然这样說，我們就要証明，这个图形是由平面上除了在 $A'M'$ 上的以外的点組成的。如果在半平面內任意取兩条射綫 AQ 和 AR，和 Ax 的傾斜角分別等于 φ_1 和 φ_2 ($\varphi_2>\varphi_1$)，那末它們的

交角是 $\alpha=\varphi_2-\varphi_1$。函数 $z'=z^2$ 把这兩条射綫变换成 $A'Q'$ 和 $A'R'$，它們和 $A'x'$ 的傾斜角分別是 $2\varphi_1$ 和 $2\varphi_2$。显然，角 $Q'A'R'$ 等于 $2\varphi_2-2\varphi_1=2(\varphi_2-\varphi_1)=2\alpha$。

因此，以 A 作頂的角，用 $z'=z^2$ 变换以后，变成了原来的兩倍，换句話說，就是映象在 A 点失去了保角性。

32. 我們来証明，用 $z'=z^2$ 变换以后，以任何点 $z_0\neq0$ 作頂的角都保持不变。由此可知，坐标原点是使以上变换失去保角性的唯一的点。

設 L 是一条从点 z_0 出发的任何曲綫。如果在 L 上取 z_0 以外的任意一点 z_1，那末联結 z_0 和 z_1 的割綫的方向跟表示差数 z_1-z_0 的向量 Q_0Q_1 一致（图 40 左方）。函数 $z'=z^2$ 把曲綫 L 变换成某一曲綫 L'，把点 z_0 和 z_1 变换成在曲綫 L' 上的新的点 $z_0'=z_0^2$ 和 $z_1'=z_1^2$。显然，联結 z_0' 和 z_1' 的割綫的方向跟表示差数 $z_1'-z_0'$ 的向量 $Q_0'Q_1'$ 一致（图 40右方）。我們来比較这兩条割綫的方向；这只要比較向量 $z_1'-z_0'$ 和 z_1-z_0 的

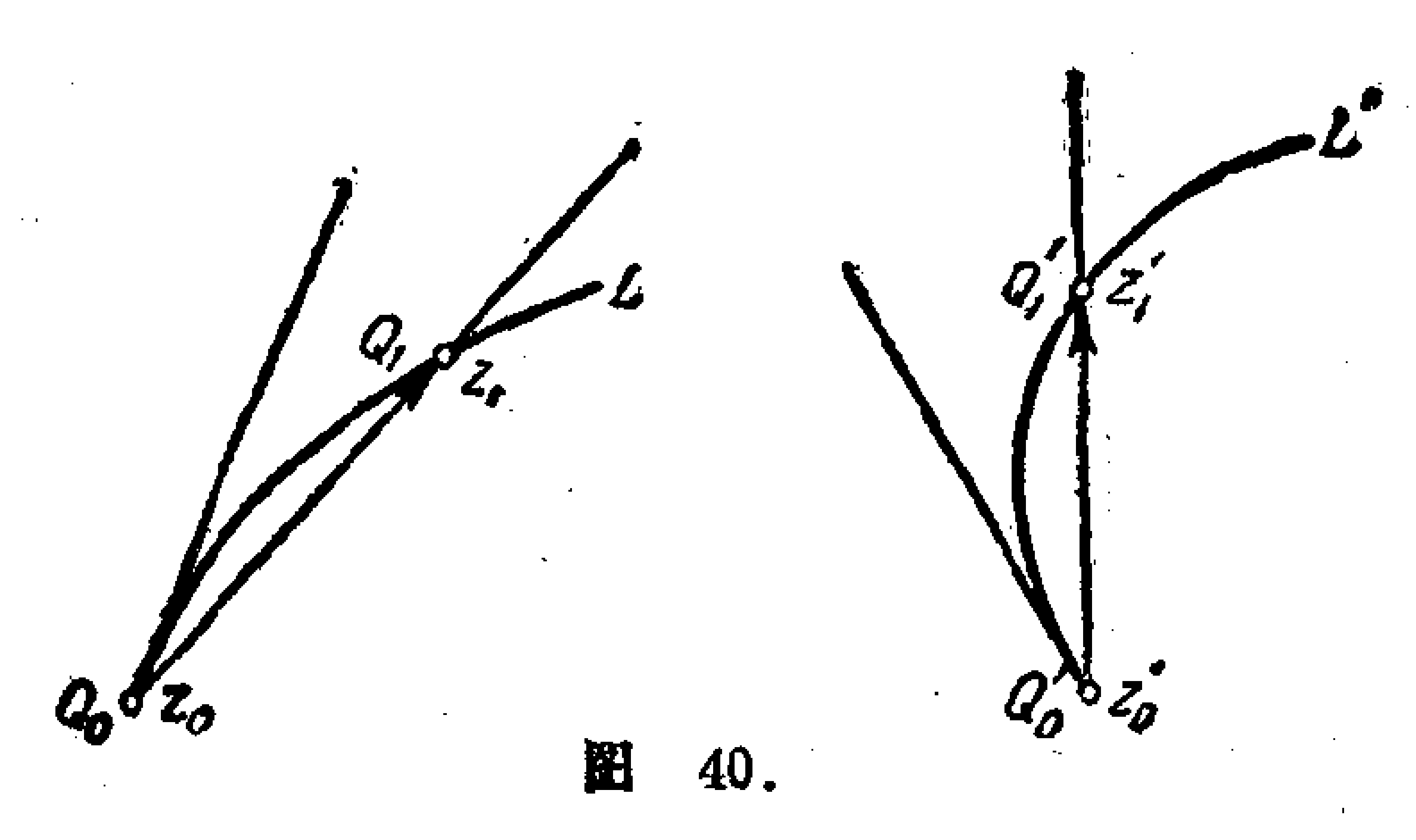


图 40.

方向就行了。因为它們的交角是看作由向量 z_1-z_0 旋轉到向量 $z_1'-z_0'$ 的角度的，它正好等于商数 $\frac{z_1'-z_0'}{z_1-z_0}$ 的幅角，所以問

题就变成了計算 $\text{Arg}\frac{z_1'-z_0'}{z_1-z_0}$。在商数 $\frac{z_1'-z_0'}{z_1-z_0}$ 里，可以代入 $z_1'=z_1^2, z_0'=z_0^2$。得到：

$$\frac{z_1'-z_0'}{z_1-z_0}=\frac{z_1^2-z_0^2}{z_1-z_0}=z_1+z_0$$

以及

$$\text{Arg}\frac{z_1'-z_0'}{z_1-z_0}=\text{Arg}(z_1+z_0).$$

因此，曲綫 L' 和 L 上通过对应点对 z_0、z_1（L 上的）和 $z_0'=z_0^2$、$z_1'=z_1^2$（L' 上的）的兩条割綫的交角等于 $\text{Arg}(z_1+z_0)$。从割綫轉变到切綫，点 z_1 將沿曲綫 L 无限趋近点 z_0。

这时候，点 $z_1'=z_1^2$ 也將沿曲綫 L' 无限趋近点 $z_0'=z_0^2$. 因此，这兩条割綫也就无限趋近从点 z_0 和 z_0' 引出的兩条切綫，兩割綫的交角也就无限趋近兩切綫的交角。但是兩割綫的交角等于 $\text{Arg}(z_0+z_1)$，当 z_1 趋近 z_0 时，这个交角就趋近 $\text{Arg}(2z_0)$；$\text{Arg}(2z_0)$ 是和 $\text{Arg}\,z_0$ 完全相同的。因此，从曲綫 L' 和 L 上的对应点 $z_0'=z_0^2$ 和 z_0 引出的兩切綫的交角等于 $\text{Arg}\,z_0$。例如，設使 $z_0=2$，那末 $\text{Arg}\,z_0=0$；因而知道，通过点 $z_0=2$ 的任意曲綫 L 在这一点的切綫，方向和 L 用函数 $z'=z^2$ 变換以后得到的曲綫 L' 在点 $z_0'=z_0^2=4$ 的切綫一致。設使 $z_0=i$，那末 $\text{Arg}\,z_0=90°$；因此，通过点 $z_0=i$ 的任意曲綫 L 在这一点的切綫，和映象曲綫 L' 在点 $z_0^2=i^2=-1$ 的切綫互相垂直。

回到一般的情形，我們可以說，当通过点 z_0 的曲綫用函数 $z'=z^2$ 作变換时，曲綫在点 z_0 的切綫旋轉了一个等于 $\text{Arg}\,z_0$ 的角。

現在就不难看出，为什么在这种变換里，以 z_0 $(z_0\neq 0)$ 作頂的角度是不变的。設通过点 z_0 有兩条曲綫 L_1 和 L_2，它們

在这一点的交角是 α，这就是說，兩曲綫在点 z_0 的切綫的交角等于 α。經过变換以后，点 z_0 变換到点 $z_0'=z_0^2$，曲綫 L_1 和 L_2 变換到 L_1' 和 L_2'。新曲綫在点 z_0'的切綫的方向，可以从旧曲綫在点 z_0 的切綫旋轉一个同样的等于 $\operatorname{Arg} z_0$的角度得到．显然，兩条新切綫間的角度仍旧是 α。这正表明了，兩曲綫以任意点 $z_0\neq 0$ 作頂的夾角，用 $z'=z^2$ 变換以后，大小是不变的．

注意，我們用来証明保角映象 $z'=z^2$ 的方法，对于其他函数，例如綫性分式函数 $z'=\frac{z-a}{z-b}$ 或儒科夫斯基函数 $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 也都适用．这里只是切綫旋轉的角度要用不同的式子来表示．例如，对于綫性分式函数，通过点 z_0 的曲綫在这一点的切綫旋轉的角度等于 $\operatorname{Arg}\frac{a-b}{(z_0-b)^2}$，而在儒科夫斯基函数的情形，这个旋轉角度等于 $\operatorname{Arg}\left(1-\frac{1}{z_0^2}\right)$．在前一种情形，必須附加条件 $z_0\neq b$（在点 $z_0=b$，分式 $\frac{z-a}{z-b}$ 沒有意义）；在后一种情形，必須附加条件 $z_0\neq 0$（理由同上），此外还得假設 $z_0\neq \pm 1$（在 $z_0=\pm 1$ 时，$1-\frac{1}{z_0^2}$ 等于零，因此 $\operatorname{Arg}\left(1-\frac{1}{z_0^2}\right)$沒有意义）。可以驗証，儒科夫斯基函数在点 -1 和 $+1$ 失去保角性：以这兩点作頂的角度，經过变換以后，扩大到原来的兩倍．

33. 現在来看，通过点 A 的圓，用函数 $z'=z^2$ 变換以后，变換成什么。設圓在点 A 的切綫和 Ax 相交成角 φ（图 41）．显然，圓整个在以这条切綫作界綫的半平面內。函数 $z'=z^2$ 把半平面变換成不包括射綫 $A'M'$ 的平面．为了决定这个圓經过变換以后的象，在半平面內从 A 尽可能引一些射綫，并标出每一条射綫和圓周的交点。在我們的图上画了七条射

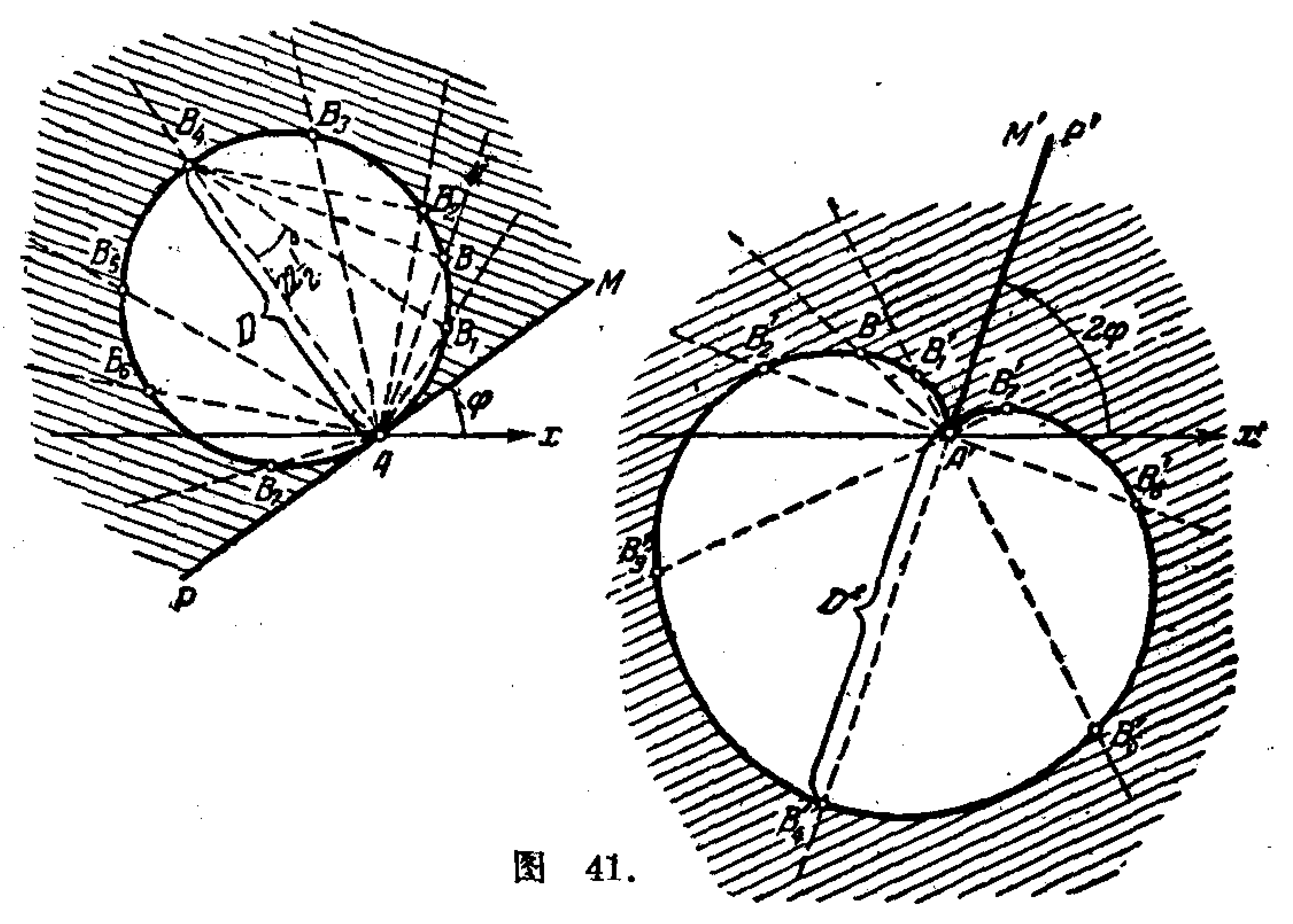


图 41.

綫；所有的角，MAB_1、B_1AB_2、B_2AB_3、…… B_7AP 都相等（等于 $22\frac{1}{2}^\circ$）。函数 $z'=z^2$ 把这七条射綫变换成另外七条射綫，每兩条射綫的交角扩大到原来的兩倍；所有的角 $M'A'B_1'$，$B_1'A'B_2'$、$B_2'A'B_3'$、……$B_7'A'P'$ 都等于 45°。

我們来計算一下，点 B_1、B_2、B_3、……B_7 变換到什么地方去了。象点 B_1'、B_2'、B_3'、…… B_7' 到点 A' 的距离，分别等于 AB_1、AB_2、AB_3、……AB_7 的平方。但是从图41立刻看出，$AB_7 = AB_1 = AB_4 \sin 22\frac{1}{2}^\circ = D\sin 22\frac{1}{2}^\circ$（$D$ 是圓的直徑）；又 $AB_6 = AB_2 = D\sin 45^\circ$，$AB_5 = AB_3 = D\sin 67\frac{1}{2}^\circ$，$AB_4 = D$。再要注意，$\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{1-\cos 45^\circ}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2-1.4142}{4} = 0.1464\cdots\cdots$，$\sin^2 45^\circ = 0.5000\cdots\cdots$，$\sin^2 67\frac{1}{2}^\circ = \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ = 1-\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ = 0.8535\cdots\cdots$ 因此，$A'B_7' = A'B_1'$

$= 0.1464\,D^2$, $A'B_6' = A'B_2' = 0.5000\,D^2$, $A'B_5' = A'B_3' = 0.8535\,D^2$, $A'B_4' = D^2$. 經过 A'、B_1'、B_2'、B_3'、……B_7' 这些点的曲綫，就是圓用 $z'=z^2$ 作变换后的象。如果要得到它的更精确的形象，可以取更多的射綫。这种曲綫叫做心臟綫。容易看出，图 41 左方阴影部分表示的图形（由半平面除去一圓得到的图形），用函数 $z'=z^2$ 作变换以后，变换成了图 41 右方阴影部分所表示的图形。后者是以心臟綫以及和实軸正方向成 2φ 角的射綫作界綫的。可以証明，射綫 $A'M'$ 的方向就是和心臟綫的兩个弧相切的由 A 点出发的切綫方向。在图41左方，任意引射綫 AB，B 表示这射綫和圓的交点；如果角 $MAB=\alpha$，那末 $AB=D\sin\alpha$。用函数 $z'=z^2$，这条射綫变换成射綫 $A'B'$（图41右方），点 B 的象点 B' 落在心臟綫上。根据我們知道的 $z'=z^2$ 变换的性質：$\widehat{M'A'B'}=2\alpha$，$A'B'=AB^2=D^2\sin^2\alpha$。設角 α 在变动，并且无限趋近于零。那末 $A'B'$ 和 $A'M'$ 的交角 2α 也將无限趋近于零，而心臟綫的割綫——射綫 $A'B'$ 將圍繞着点 A' 轉动，并且无限趋近极限位置 $A'M'$。这时候，点 B'——割綫和心臟綫离 A' 最近的一个交点，將无限趋近点 A'，因为当 α 趋近于零时，距离 $A'B'=D^2\sin^2\alpha$ 也趋近于零。由此可知，割綫的极限位置 $A'M'$ 是弧 $A'B_1'B_2'$……在点 A' 的切綫。同样可以証明，$A'M'$ 也是弧 $A'B_7'B_6'$……在同一点 A' 的切綫。

34. 最后，我們轉到儒科夫斯基函数 $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$，并且用它来变换由兩个圓圍成的图形：一个圓通过点 -1 和 $+1$，另一个圓在点 1 內切于前一个圓。图 42 的阴影部分表示这个图形。

先来証明，$z'=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$变换可以化成几个我們已經熟悉的、形式比較簡單的变换．为了达到这个目的，我們来研究一下分式$\frac{z'-1}{z'+1}$．用$\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$来代替$z'$，得到：

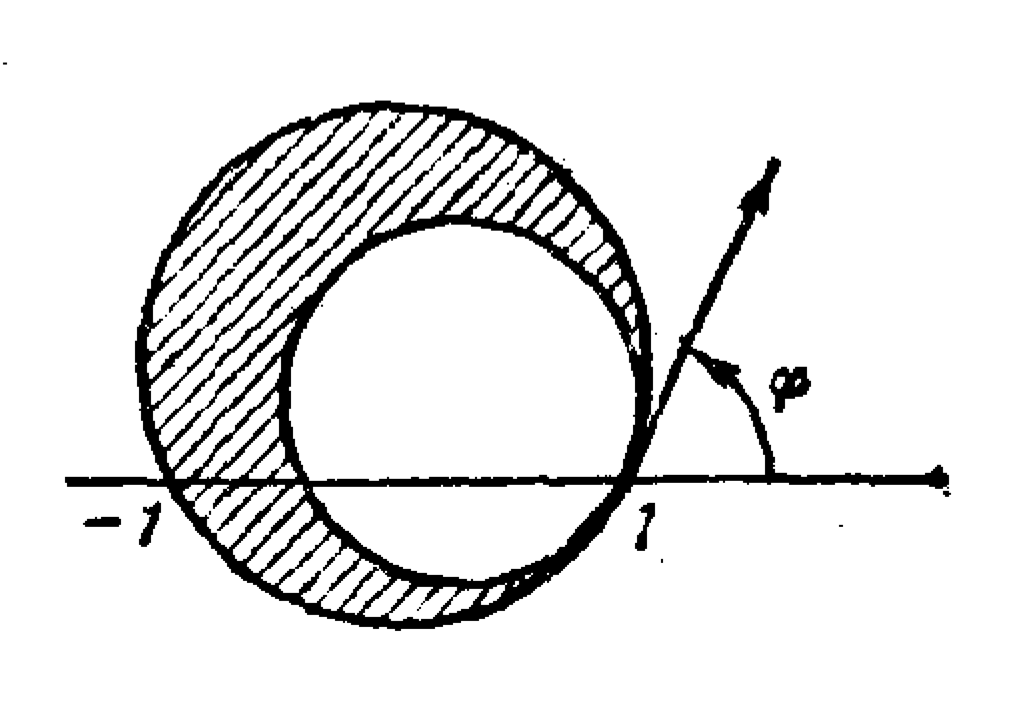


图 42.

$$\frac{z'-1}{z'+1}=\frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})-1}{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+1}=\frac{z^2+1-2z}{z^2+1+2z}=(\frac{z-1}{z+1})^2.$$

因此，从$z'=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$可以推出$\frac{z'-1}{z'+1}=(\frac{z-1}{z+1})^2$．反过来也是正确的：从第二个式子可以推出第一个式子．事实上，从第二个式子可以得到：

$$z'-1=z'(\frac{z-1}{z+1})^2+(\frac{z-1}{z+1})^2,$$

由此可得 $$z'[1-(\frac{z-1}{z+1})^2]=1+(\frac{z-1}{z+1})^2$$

以及 $$z'=\frac{1+(\frac{z-1}{z+1})^2}{1-(\frac{z-1}{z+1})^2}=\frac{(z+1)^2+(z-1)^2}{(z+1)^2-(z-1)^2}$$

$$=\frac{2z^2+2}{4z}=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}).$$

于是，关系式$z'=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$和$\frac{z'-1}{z'+1}=(\frac{z-1}{z+1})^2$完全等价（从这一个可以推出另一个）．

因此，儒科夫斯基函数$z'=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$变换可以表示成$\frac{z'-1}{z'+1}=(\frac{z-1}{z+1})^2$形式．兩种表示形式会得到同样的結果．但

是現在可以看出，从 z 轉变到 z' 可以分三步实現。先从 z 轉变到輔助变数 z_1，可以用公式：

$$z_1=\frac{z-1}{z+1}; \qquad (1)$$

再从 z_1 轉变到 z_2，根据公式：

$$z_2=z_1^2; \qquad (2)$$

最后，从 z_2 轉变到 z'，根据公式：

$$\frac{z'-1}{z'+1}=z_2. \qquad (3)$$

讀者很容易明白，要是把公式(1)的表示 z_1 的式子代入公式 (2)，再把得到的表示 z_2 的式子代入公式 (3)，那就得到了我們需要的变換 $\frac{z'-1}{z'+1}=(\frac{z-1}{z+1})^2$。

为什么要用 (1)、(2)、(3) 三个变換来代替一个儒科夫斯基变換呢？就是因为这三个变換个个比儒科夫斯基变換簡單，并且个个都是我們已經熟悉的。

于是，我們就来对图 42 上的图形作公式(1)的变換，再把得到的图形作公式 (2) 的变換，最后再把得到的图形作公式(3)的变換。

回忆在第 30 节，我們已經知道，图 38 左方的图形（它和图 42 的图形一样）用函数 $z_1'=\frac{z-1}{z+1}$（就是函数 (1)）来变換，就变換成图 38 右方的图形。图 38 右方图形的边界是通过点 O 和实軸正方向相交成角 φ 的一条直綫，以及和这条直綫相切于点 O 的一个圓。这个图形可以看作是除去一个圓的半平面。这个图形再用函数 $z_2=z_1^2$（就是函数(2)）来变換。只要看一看图 41，就知道这問題在第 33 节已經解决了。在第 33

节末了我們曾經指出，变换后应該得到图 41 右方的图形；它是以一个心臟綫和一条射綫作界綫的图形。現在剩下来的，就是把这个图形再作$\frac{z'-1}{z'+1}=z_2$(就是函数(3))的变换。在这里，z'可以看作是独立变数，z_2可以看作是函数。根据第28节講的，当 z_2 画出从原点出发、并和实軸正方向相交成角 2φ 的射綫$A'M'$时，对应点 z' 就会画出一个联結点 +1 和 -1 的圓弧；这个圓弧在点 +1 的切綫，跟从点 -1 到点 +1 的方向，就是实軸的正方向，形成的角也是 2φ(图 43)。

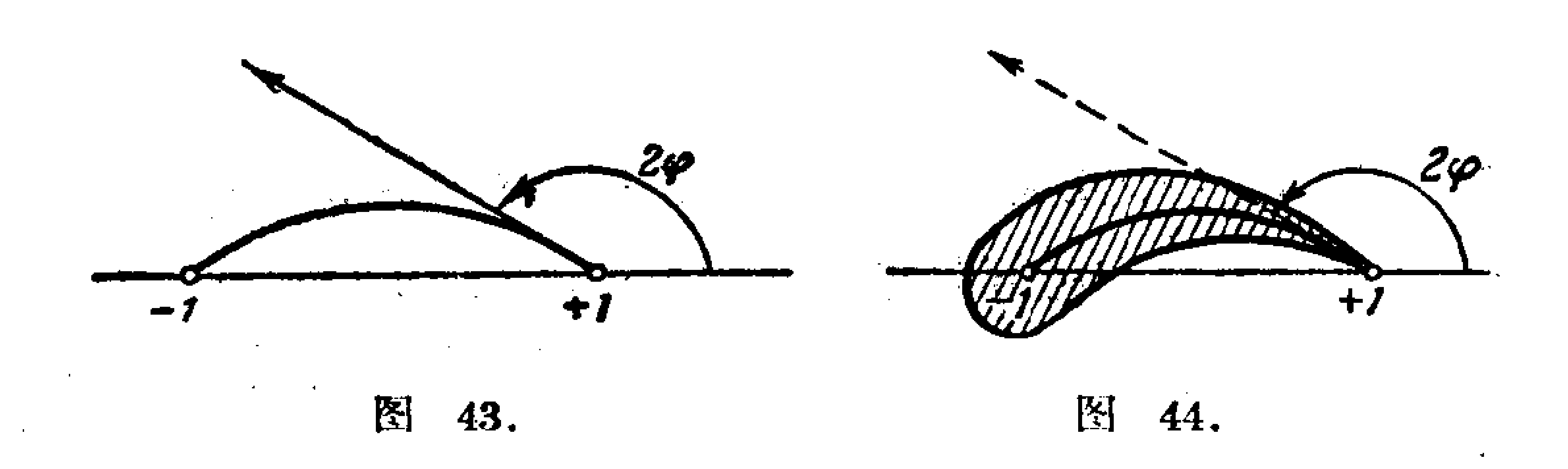


图 43.　　图 44.

这样，我們就得到了射綫 $A'M'$ 經过$\frac{z'-1}{z'+1}=z_2$变换后的象。为要求得心臟綫的象，可以看看点 B_1'、B_2'、……B_7' 变换到了什么地方。但是，我們不預备在这里作繁复的計算，只要能够作出变换得的曲綫的完整形狀如图 44 就行了。

这个曲綫的形狀象机翼横断面，就是翼型。这种翼型是俄国学者查普列金和儒科夫斯基首創的，因此叫做儒科夫斯基-查普列金翼型。改变圓在点 +1 的切綫的傾斜角(图 42)和小圓半徑，可以得到种种不同的翼型。特别在 φ 是直角时，就是說，大圓以 -1 到 +1 的綫段作直徑时，对应的翼型是和实軸对称的(图 45)。这种翼型有时候也叫儒科夫斯基舵。

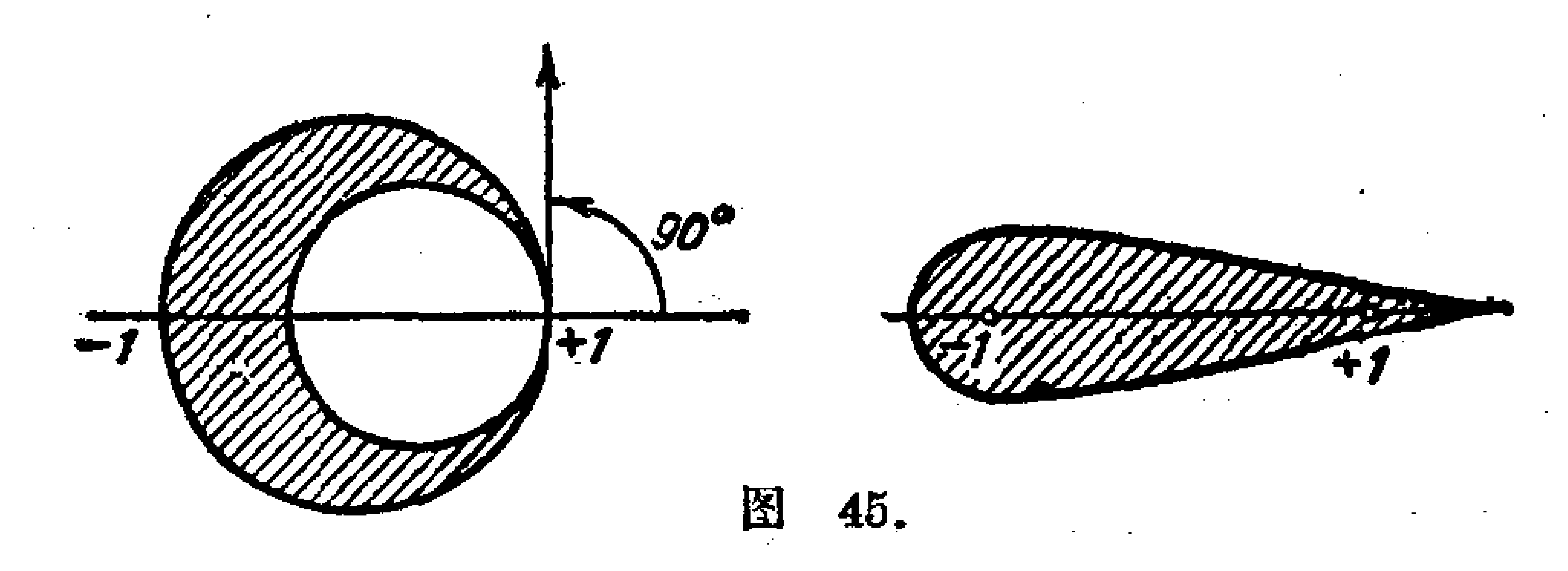


图 45.

儒科夫斯基-查普列金翼型是有关机翼的一切理論研究的基本翼型。

习 题

1. 設兩个复数 $c_1=a_1+b_1i$ 和 $c_2=a_2+b_2i$ 相等，試証明它們的实部分和虛部分也分別相等：$a_1=a_2$，$b_1=b_2$。

提示 表示相等复数的向量，一定長短相同、互相平行、并且方向一致。

2. 应用加法和乘法的交換律、結合律和分配律，来完成下列的复数运算：

1. $(3-7i)+(-2+i)+(-1+5i)$；

2. $(3-7i)(3+7i)$； 3. $(1+i)(1+i\sqrt{3})$；

4. $(1+i)^2\div(1-i)^2$； 5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$.

答：1. $-i$；2. 58；3. $1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$；4. -1；5. -1.

3. 对于任意复数 $c=a+bi\neq0$，設它的絕对值等于 r，幅角等于 α，試証明：

$$c=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

(复数的三角函数式)。

提示 作一图，在图上 $c=a+bi$ 是用向量来表示的。靠图的帮助，用 r 和 α 来表示出 a 和 b。

4. 試証明：如果

$$c_1=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1),\quad c_2=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2),$$

那末
$$c_1c_2=r_1r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)].$$

提示 利用复数乘法規則的几何形式，或者用乘法和加法規則，把 c_1 和 c_2 直接乘出来，再用和的正弦余弦的公式。

5. 根据前一个习題的結果，来証明：如果

$$c=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

(r 是 c 的絕对值，α 是 c 的幅角)，那末

$$c^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

(n 是自然数)。并由此导出：

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

(第美弗氏公式)。

6. 用第美弗氏公式(見第5題)，計算：

1. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$；　2. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{217}$.

提示 $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ$；$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$。

答：1. -1；　2. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

7. 从第美弗氏公式出发(見第5題)，导出 $\cos n\alpha$ 和 $\sin n\alpha$ 在 $n=2,3$ 和 4 时的公式。

提示 在第美弗氏公式$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$中，把$\cos\alpha+i\sin\alpha$的$n$次方直接乘出(例如，$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha$)，然后再使第美弗氏公式等号双方的实部分和实部分相等、虛部分和虛部分相等就行了。

答：$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$；$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha$；$\sin 3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha$；$\cos 4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$；$\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$。

8. 以点0、$1-i$、$1+i$作頂的三角形，經过

$$z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$$

变换，結果怎么样？这个变换的几何意义是什么？

提示 从探討几何意义着手。但是，也可以从計算变换得到的三角形的頂点着手。

9. 以-1到$+1$的綫段作直徑并在实軸上方的半圓，經过$z'=\frac{z-1}{z+1}$变换，結果怎么样？

答：变换成虛軸上半部分和实軸負的部分圍成的直角。

10. 以坐标原点作頂的角α，經过$z'=z^3$变换以后，变换成什么？

答：变换成以坐标原点作頂的角3α。